

# $H_\infty$ フィルタを用いた移動ロボット の自己位置推定問題における可観測性と逃避時間回避

大川 佳寛 滑川 徹 (慶應義塾大学)

## Observability and Avoidance of Finite Escape Time in SLAM via $H_\infty$ Filter

\*Y. Okawa and T. Namerikawa (Keio University)

**Abstract**– This paper deals with the observability and the avoidance of finite escape time in simultaneous localization and mapping problem via  $H_\infty$  filter. The estimation via  $H_\infty$  filter occurs finite escape time depending on the value of the parameter  $\gamma$  and then the estimation fails or deteriorates. In order to avoid it we add the observation of a priori known landmark. We show the observability is satisfied and prove the convergence of the error covariance matrices. In simulation and experimental results, we confirm the avoidance of the finite escape time and the correctness of derived theorems for the convergence and then we show robot's state and environment information can be estimated.

**Key Words:** Observability, SLAM,  $H_\infty$  filter, finite escape time

### 1 はじめに

Simultaneous Localization and Mapping (以下 SLAM) 問題とは、不確かさを含むセンサ情報から自律移動ロボットが自己位置推定と環境認識を同時に行う問題であり、その技術は掃除ロボットや惑星探査ロボットなど屋内外で活動する多くの自律移動ロボットに適用されている<sup>1)</sup>。近年、この SLAM 問題の研究は盛んに行われており、その解法としてさまざまな手法が提案されている。本稿では雑音に対してロバストである  $H_\infty$  フィルタを用いた SLAM 問題について扱う。 $H_\infty$  フィルタを用いた手法はすでに文献<sup>2, 3)</sup>などで提案されている。しかし文献<sup>2)</sup>で述べられている通り、 $H_\infty$  フィルタを用いた推定では、設計パラメータ  $\gamma$  の値によっては推定誤差共分散行列の値が発散する逃避時間が発生し、推定精度の悪化や推定失敗を引き起こすことがある。この問題に対して文献<sup>4)</sup>では誤差共分散行列の更新式に重みを加えることで逃避時間回避を達成しているが、この手法では新たなパラメータ設定が必要となる。

そこで本稿では、逃避時間回避を目的として、事前に位置情報が既知であるランドマーク観測を含む  $H_\infty$  フィルタによる解法を提案する。本手法では観測行列に、未知のランドマーク観測に加え、1つの事前に位置情報が既知であるランドマーク観測を加えることで誤差共分散行列の値を抑え、逃避時間回避を達成する。この手法は文献<sup>4)</sup>で述べられている手法と比べて、設定するパラメータ数が少ないため、現実問題への適用において、より有用な手法である。また文献<sup>5, 6, 7)</sup>より既知のランドマーク観測を加えることで、テイラー展開によって線形化した SLAM 問題における非線形システムが可観測性を満たすことを示す。そして本稿で提案する手法の有用性を理論的に確認するために、移動ロボットの静止時において、アルゴリズムの更新につれて推定誤差共分散行列が収束することを証明する。さらにシミュレーション結果と、ソナーセンサを搭載した移動ロボットによる制御実験の検証結果より、事前

に位置が既知であるランドマーク観測を加えることによって、実際に推定誤差共分散行列が発散せず、逃避時間を回避して収束すること、更には従来法に比べ、推定精度が向上していることを示す。

### 2 問題設定

#### 2.1 自己位置推定と環境認識問題

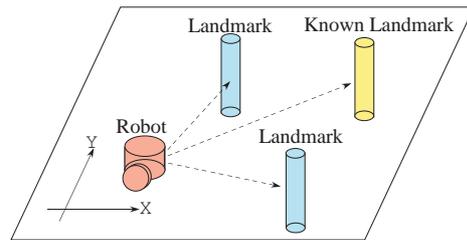


Fig. 1: Illustration for SLAM problem with a priori known landmark

Fig.1 にシステムの全体図を示す。移動ロボットを取り巻く環境を  $XY$  平面上に散在する  $M$  個の静止している未知のランドマークと、1個の静止している事前に位置情報が既知であるランドマークによって構成されると仮定し、ロボットにノイズを含む観測情報を用いて、この  $M$  個の未知のランドマークの位置とロボット自身の自己位置を同時に推定させる問題を考える。

#### 2.2 移動ロボットとランドマークの状態モデル

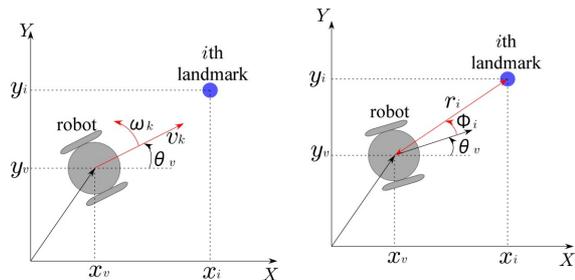


Fig. 2: Process model

Fig. 3: Measurement model

まずロボットの状態について考える．Fig. 2 に状態モデルの図を示す．あるステップ時刻を  $k$  とおく．ロボットの状態更新式は以下のように表わせる．

$$\mathbf{x}_{v_{k+1}} = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_{v_k}, v_k, \omega_k) + \mathbf{e}_{1v_k} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}_{v_k}, v_k, \omega_k) = \begin{bmatrix} \theta_{v_k} + T\omega_k \\ x_{v_k} + Tv_k \cos\theta_{v_k} \\ y_{v_k} + Tv_k \sin\theta_{v_k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$v_k \in \mathbb{R}^1$ ,  $\omega_k \in \mathbb{R}^1$  はそれぞれロボットに入力される速度および角速度,  $\mathbf{x}_{v_k} = [\theta_{v_k} \ x_{v_k} \ y_{v_k}]^T \in \mathbb{R}^3$  はロボットの位置と姿勢角を持つロボットの状態ベクトル,  $\mathbf{f}_v \in \mathbb{R}^3$  は状態遷移を規定する非線形関数,  $T$  はサンプリング時間である．また,  $\mathbf{e}_{1v_k} \in \mathbb{R}^3$  はロボットに加わるプロセス雑音で, 平均  $\mathbf{0}$ , 共分散は  $Q_{v_k}$  である．次にランドマークの状態について考える．ランドマークを姿勢角の情報のない  $XY$  座標上の点と仮定し,  $i$  番目のランドマークの  $XY$  座標を  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $M$  個全体のランドマークの座標をまとめたものを  $\mathbf{p}_{all} = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \cdots \ \mathbf{p}_M^T]^T \in \mathbb{R}^{2M}$  とする．また, 事前に位置情報が既知であるランドマークは状態推定を行う必要がないため状態モデルには加わらない．ここで移動ロボットとランドマークを一つの拡大システムと考え, システム全体の状態遷移をつぎのように定義する．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v_{k+1}} \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_{v_k}, v_k, \omega_k) \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1v_k} \\ \mathbf{0}_{2M \times 1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, v_k, \omega_k) + \mathbf{e}_{1k} \quad (4)$$

ただし  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{3+2M}$  はシステムの状態ベクトル,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3+2M}$  は状態遷移を規定する非線形関数,  $\mathbf{e}_{1k} \in \mathbb{R}^{3+2M}$  はロボットに加わるプロセス雑音であり, 平均  $\mathbf{0}$ , 共分散は  $Q_k$  である．

### 2.3 観測モデル

次に観測方程式について考える．Fig. 3 に観測モデルの図を示す．ロボットと  $i$  番目のランドマークとの相対距離を  $r_i$ , 相対角度を  $\varphi_i$  とすると,  $i$  番目のランドマークを観測する際の観測方程式は以下ようになる．

$$\mathbf{y}_{i_k} = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_{2i_k} \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(dy_i/dx_i) - \theta_{v_k} \\ \sqrt{dy_i^2 + dx_i^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$dx_i = x_i - x_v, \quad dy_i = y_i - y_v \quad (7)$$

ただし,  $\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  は  $i$  番目のランドマークの観測を表わす関数,  $\mathbf{e}_{2i_k} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  は  $i$  番目のランドマークにおける観測雑音であり, 平均  $\mathbf{0}$ , 共分散は  $\mathbf{R}_{i_k} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  である．同様に位置情報が既知であるランドマークの  $XY$  座標を  $\mathbf{p}_p = [x_p \ y_p]^T$  とし, その観測方程式を以

下のおく．

$$\mathbf{y}_{p_k} = \mathbf{h}_p(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_{2p_k} \quad (8)$$

$$\mathbf{h}_p = \begin{bmatrix} \varphi_p \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(dy_p/dx_p) - \theta_{v_k} \\ \sqrt{dy_p^2 + dx_p^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$dx_p = x_p - x_v, \quad dy_p = y_p - y_v \quad (10)$$

ただし,  $\mathbf{h}_p(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  は事前に既知であるランドマークの観測を表わす関数,  $\mathbf{e}_{2p_k} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  はその観測雑音であり, 平均  $\mathbf{0}$ , 共分散は  $\mathbf{R}_{p_k} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  である．

$M$  個の未知の各ランドマークと 1 つの事前に位置情報が既知であるランドマークをひとつの拡大システムと考え,  $M+1$  個のランドマークを観測する場合の観測モデルを次のように定義する．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1_k} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{M_k} \\ \mathbf{y}_{p_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{h}_p(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{21_k} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{2M_k} \\ \mathbf{e}_{2p_k} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}^\dagger(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_{2k} \quad (12)$$

ただし,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 1}$  は観測出力,  $\mathbf{h}^\dagger(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 1}$  は観測を表わす非線形関数,  $\mathbf{e}_{2k} \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 1}$  は観測雑音で, 平均  $\mathbf{0}$ , 共分散は  $\mathbf{R}_k^\dagger \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 2(M+1)}$  である．

ここでシステムにおいて, 以下の仮定を置く．

仮定 1. ランドマークは静止している．

仮定 2. センサの有効範囲は考慮しない．

仮定 3. 同時に  $M+1$  個のランドマークを観測でき, それぞれを識別できる．

仮定 4. あるランドマークがその他のランドマークによって隠される場合を考慮しない．

仮定 5. プロセス雑音  $\mathbf{e}_{1k}$ , 観測雑音  $\mathbf{e}_{2k}$  はそれぞれ独立しており, 平均  $\mathbf{0}$  で共分散行列が (13) 式となるような白色雑音である．

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1k} \\ \mathbf{e}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1k}^T & \mathbf{e}_{2k}^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_k^\dagger \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし  $\mathbf{Q}_k \geq 0, \mathbf{R}_k^\dagger > 0$  である．

## 3 $H_\infty$ フィルタベース SLAM

次に一般的な  $H_\infty$  フィルタベース SLAM について議論する．確率的に SLAM 問題を考えている場合, 状態誤差共分散行列  $\mathbf{P}_k$  の収束が推定の確かさを決めるパラメータとなる．

### 3.1 $H_\infty$ フィルタリング問題

まず問題設定で与えた線形状態空間モデルを一般化したものを以下に示す．

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (15)$$

$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  は状態ベクトル,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  は観測ベクトル,  $\mathbf{F}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{H}_k$  はそれぞれ  $n \times n, n \times r, n \times n$  行列であり, また  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^r$  および  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$  は雑音ベクトルである. ここで以下の仮定がなされているとする.

仮定 6. ノイズの積算エネルギーは有界である. つまり与えられた時刻  $N > 0$  に対して (16) 式が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^N \|\mathbf{w}_k\|^2 < \infty, \sum_{k=0}^N \|\mathbf{v}_k\|^2 < \infty \quad (16)$$

$H_\infty$  フィルタでは観測データに基づいて, 状態ベクトルの線形結合  $\mathbf{z}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$  を推定する問題を考察する. 有限時間  $H_\infty$  フィルタリング問題は, 与えられた  $\gamma > 0$  に対して以下の条件式 (17) 式を満たす推定値  $\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k^*$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) を求める問題である.

$$\sup_{\mathbf{x}_0, \mathbf{w}, \mathbf{v}} \frac{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{P}_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{Q}_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2} < \gamma^2 \quad (17)$$

ただし  $\mathbf{P}_0 > 0, \mathbf{Q}_k \geq 0, \mathbf{R}_k > 0$  はそれぞれ初期状態  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ , 雑音  $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$  に対する重み行列である.

### 3.2 SLAM における $H_\infty$ フィルタアルゴリズム

線形システムに対する  $H_\infty$  フィルタアルゴリズムを利用して, 非線形システムの線形化を含む  $H_\infty$  フィルタアルゴリズムを書き表す. このフィルタを前述の問題設定に適用すると,  $\mathbf{L}_k, \mathbf{G}_k$  が単位行列となる. これとヤコビ行列を用いて線形化したシステムにより, 非線形システムに拡張した有限時間  $N$  の間に収束する準最適  $H_\infty$  フィルタが存在するための必要十分条件は以下の 2 つとなる.

1. リカッチ方程式 (18) 式が正定解をもつ.

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k > \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\Psi_k = \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \quad (19)$$

2. (20) 式が正定解をもつ.

$$\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I} > \mathbf{0}, k = 0, 1, \dots, N \quad (20)$$

このとき準最適  $H_\infty$  フィルタは, 以下に示す 3 ステップの再帰的处理により計算することができる. ここで添え字  $_{k+1|k}$  は時刻  $k$  における次の時刻  $k+1$  の推定値を表わす.

Step1: 予測

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}_k) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{3+2M} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \mathbf{h}^{\dagger}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{2(M+1)} \quad (22)$$

Step2: 観測

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} \quad (23)$$

Step3: 更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1|k} \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \quad (25)$$

ただし  $\mathbf{K}_{k+1}$  はフィルタゲインであり, これと状態共分散行列は以下のように書ける.

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^{\dagger T} (\mathbf{H}_k^{\dagger} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^{\dagger T} + \mathbf{R}_k^{\dagger})^{-1} \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k > \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\Psi_k = \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \quad (28)$$

ここで  $\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k^{\dagger}$  はそれぞれ遷移関数および観測関数のヤコビ行列であり各成分は以下ようになる.

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v & \mathbf{0}_{3 \times 2M} \\ \mathbf{0}_{2M \times 3} & \mathbf{I}_{2M \times 2M} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_k^{\dagger} = \frac{\partial \mathbf{h}^{\dagger}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = [ \mathbf{H}_v^{\dagger} \mid \mathbf{H}_p^{\dagger} ] \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_v^{\dagger} \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 3}, \mathbf{H}_p^{\dagger} \in \mathbb{R}^{2(M+1) \times 2M}$$

ただし

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v_k T \sin \theta_{v_k} & 1 & 0 \\ v_k T \cos \theta_{v_k} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_v^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T & -\mathbf{e}^T & \dots & -\mathbf{e}^T & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{A}_1^T & -\mathbf{A}_2^T & \dots & -\mathbf{A}_M^T & -\mathbf{A}_p^T \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_p^{\dagger} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_M \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\frac{dy_i}{r_i^2} & \frac{dx_i}{r_i^2} \\ \frac{dx_i}{r_i} & \frac{dy_i}{r_i} \end{bmatrix} \quad (34)$$

( $i = 1, 2, \dots, M, p$ )

ここでフィルタの存在条件として次の定理 1 が成り立つ.

定理 1. 仮定 1-6 が成り立つとする. さらにロボットが静止していると仮定した場合, 有限時間  $N$  の間に収束する準最適  $H_\infty$  フィルタが存在するための条件は (35) 式を満たすことである.

$$\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I} > \mathbf{0}, k = 0, 1, \dots, N \quad (35)$$

*Proof.* ロボットが静止していると仮定した時, ヤコビ行列  $\mathbf{F}_k$  およびプロセス雑音の共分散行列  $\mathbf{Q}_k$  は以下ようになる.

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{I}_{(3+2M) \times (3+2M)}, \mathbf{Q}_k = \mathbf{0}_{(3+2M) \times (3+2M)} \quad (36)$$

すると (18) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k \{ \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \}^{-1} \\ &= (\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^{\dagger T} \mathbf{R}_k^{\dagger -1} \mathbf{H}_k^{\dagger} - \gamma^{-2} \mathbf{I})^{-1} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

これより (37) 式は (20) 式の逆行列と一致する. ここで正定値行列の逆行列も正定値行列であるので, この 2

つの条件は1つにまとめることができる．よって，準最適  $H_\infty$  フィルタが存在するための条件は (35) 式で与えられる．  $\square$

### 3.3 可観測性について

ランドマークが全て未知の場合の観測関数のヤコビ行列を  $H_k$  とすると， $(F_k, H_k)$  で表わされるシステムは部分的可観測にすぎない<sup>5)</sup>．そこで，1つの事前に位置情報が既知のランドマーク観測を加えることによって可観測性について次の補題が成り立つ<sup>5)6)7)</sup>．

補題 1. 仮定 1-6 が成り立つとする．状態遷移関数のヤコビ行列を  $F_k$ ，事前に位置が既知であるランドマーク観測を加えた観測関数のヤコビ行列を  $H_k^\dagger$  とすると， $(F_k, H_k^\dagger)$  で表わされるシステムは完全可観測となる．

*Proof.* まず

$$\begin{aligned} H_k^\dagger F_k^j &= \begin{bmatrix} H_v^\dagger & H_p^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^j \\ &= \begin{bmatrix} H_v^\dagger & H_p^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_k^\dagger F_k^j & H_p^\dagger \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, 2M+2) \end{aligned} \quad (38)$$

より，可観測行列  $G_O$  は次のようになる．

$$G_O = \begin{bmatrix} H_k^\dagger \\ H_k^\dagger F_k \\ H_k^\dagger F_k^2 \\ \vdots \\ H_k^\dagger F_k^{2M+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_v^\dagger & H_p^\dagger \\ H_v^\dagger F_v & H_p^\dagger \\ H_v^\dagger F_v^2 & H_p^\dagger \\ \vdots & \vdots \\ H_v^\dagger F_v^{2M+2} & H_p^\dagger \end{bmatrix} \quad (39)$$

ここで，(32) 式より， $H_v^\dagger F_v^j$  の各成分において，

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -e & -A_i \end{bmatrix} F_v^j \\ &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{dy_i}{r_i^2} & -\frac{dx_i}{r_i^2} \\ 0 & -\frac{dx_i}{r_i} & -\frac{dy_i}{r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -j \cdot v_k T \sin \theta_{v_k} & 1 & 0 \\ j \cdot v_k T \cos \theta_{v_k} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -X_{ij} & -A_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, M, p) \end{aligned} \quad (40)$$

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + j v_k T \left( \frac{dy_i}{r_i^2} \sin \theta_{v_k} + \frac{dx_i}{r_i^2} \cos \theta_{v_k} \right) \\ j v_k T \left( \frac{dx_i}{r_i} \sin \theta_{v_k} + \frac{dy_i}{r_i} \cos \theta_{v_k} \right) \end{bmatrix} \quad (41)$$

であるので，可観測行列  $G_O$  の各成分は以下のように計算することができる．

$$H_k^\dagger F_k^j = \begin{bmatrix} -X_{1j} & -A_1 & A_1 \\ -X_{2j} & -A_2 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -X_{Mj} & -A_M & A_M \\ -X_{pj} & -A_p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (42)$$

よって (42) 式より，各  $j$  について (39) 式に代入すると，事前に既知なランドマーク観測を加えた可観測行列の rank は状態ベクトルの次元  $2M+3$  と一致し，このシステムが完全可観測性を満たしていることが確認できる．  $\square$

### 3.4 誤差共分散について

事前に位置情報が既知なランドマーク観測を加えた場合と，加えなかった場合の誤差共分散行列の関係について次の補題が成り立つ．

補題 2. 仮定 1-6 が成り立つとする．ある時刻における事前に既知なランドマーク観測を加えた  $H_\infty$  フィルタ (*Obs.HF*) による誤差共分散行列の値  $P_{k+1}$  は，同時刻でのもとの  $H_\infty$  フィルタ (*HF*) による値  $\bar{P}_{k+1}$  よりも小さくなる．

*Proof.* 時刻  $k$  における両誤差共分散行列の値がともに  $P_k = \bar{P}_k = P$  で等しいとすると，(27) 式より次の時刻  $k+1$  における誤差共分散行列は以下のように書ける．

Obs.HF :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= F_k^T P \Psi_k^{-1} F_k + Q_k \\ &= F_k^T (P^{-1} + H_k^{\dagger T} R_k^{-1} H_k^\dagger - \gamma^{-2} I)^{-1} F_k + Q_k \end{aligned} \quad (43)$$

HF :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= F_k^T P \Psi_k^{-1} F_k + Q_k \\ &= F_k^T (P^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k - \gamma^{-2} I)^{-1} F_k + Q_k \end{aligned} \quad (44)$$

ただし，

$$H_k = \begin{bmatrix} H_v & H_p \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$H_v = \begin{bmatrix} -e^T & -e^T & \cdots & -e^T \\ A_1^T & A_2^T & \cdots & A_M^T \end{bmatrix}^T \quad (46)$$

$$H_p = \text{block diag}\{A_1, A_2, \dots, A_M\} \quad (47)$$

これよりこの二つの差は  $H_k^{\dagger T} R_k^{-1} H_k^\dagger$  と  $H_k^T R_k^{-1} H_k$  の差であり， $R_k^{-1} = R^{-1} \times I_{2M}$ ， $R_k^{\dagger^{-1}} = R^{-1} \times I_{2(M+1)}$  とすると次式を得る．

$$H_k^T R_k^{-1} H_k = R^{-1} \begin{bmatrix} H_v^T H_v & H_v^T H_p \\ H_p^T H_v & H_p^T H_p \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$H_k^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H_k^\dagger = R^{-1} \begin{bmatrix} H_v^{\dagger T} H_v^\dagger & H_v^{\dagger T} H_p^\dagger \\ H_p^{\dagger T} H_v^\dagger & H_p^{\dagger T} H_p^\dagger \end{bmatrix} \quad (49)$$

ここで (48), (49) 式の各成分について計算すると以下のようになる．

$$H_v^T H_v = \begin{bmatrix} M \cdot e^T e & \sum_{i=1}^M e^T A_i \\ \sum_{i=1}^M A_i^T e & \sum_{i=1}^M A_i^T A_i \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$H_v^{\dagger T} H_v^\dagger = \begin{bmatrix} (M+1) \cdot e^T e & \sum_{i=1}^M e^T A_i + e^T A_p \\ \sum_{i=1}^M A_i^T e + A_p^T e & \sum_{i=1}^M A_i^T A_i + A_p^T A_p \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} H_v^T H_p &= H_v^{\dagger T} H_p^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} -e^T A_1 & \cdots & -e^T A_M \\ -A_1^T A_1 & \cdots & -A_M^T A_M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} H_p^T H_p &= H_p^{\dagger T} H_p^{\dagger} \\ &= \text{block diag}\{A_1 A_1^T, A_2 A_2^T, \dots, A_M A_M^T\} \end{aligned} \quad (53)$$

よって (48) 式と (49) 式の差は次式のようになる。

$$\begin{aligned} H_k^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H_k^{\dagger} - H_k^T R_k^{-1} H_k \\ = R^{-1} \left[ \begin{array}{cc|c} e^T e & e^T A_p & \mathbf{0}_{1 \times 2M} \\ A_p^T e & A_p^T A_p & \mathbf{0}_{2 \times 2M} \\ \hline \mathbf{0}_{2M \times 1} & \mathbf{0}_{2M \times 2} & \mathbf{0}_{2M \times 2M} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (54)$$

ゆえに  $H_k^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H_k^{\dagger} \geq H_k^T R_k^{-1} H_k$  となるので (43),(44) 式より, その逆行列を用いて更新される誤差共分散行列は Obs.HF による値のほうが小さくなる。□

### 3.4.1 誤差共分散行列の収束性

時刻  $k$  において移動ロボットが静止した時の推定誤差共分散行列の値を  $P_k^0$  とし, その後  $i$  回観測が行われた時の推定誤差共分散行列の値を  $P_k^i$  とする。また式を簡略化するために  $W_k$  を (55) 式のように定義する。

$$W_k = H_k^T R_k^{-1} H_k - \gamma^{-2} I \quad (55)$$

ここでロボットが静止しているとすると, 観測関数のヤコビ行列  $H_k$  は各観測において同じ値となるので  $H_k = H$  となり, (55) 式より  $W_k$  も各観測において同じ値となるので  $W_k = W$  とし, 各成分を以下のようにおく。

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_v^T R_k^{-1} H_v - \gamma^{-2} I_3 & H_v^T R_k^{-1} H_p \\ H_p^T R_k^{-1} H_v & H_p^T R_k^{-1} H_p - \gamma^{-2} I_{2M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

また,  $D$  を以下のように定義する。

$$D = R^{-1} \begin{bmatrix} e^T e & e^T A_p \\ A_p^T e & A_p^T A_p \end{bmatrix} \quad (57)$$

すると Obs.HF による推定において,  $W^{\dagger} = H^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H^{\dagger} - \gamma^{-2} I$  は (54) 式より以下のようになる。

$$W^{\dagger} = \begin{bmatrix} W_{11} + D & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (58)$$

このときロボットが静止した状態でランドマークを観測し続けたとすると次の定理が成り立つ。

定理 2. 仮定 1-6 が成り立つとする。さらにロボットが静止した状態でランドマークを観測し続けたと仮定する。  $H_{\infty}$  フィルタが存在するとき, 推定誤差共分散行列  $P_k$  がアルゴリズムの更新につれて単調減少する条件は (59) 式を満たすことである。

$$W^{\dagger} = H_k^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H_k^{\dagger} - \gamma^{-2} I > \mathbf{0} \quad (59)$$

*Proof.* 定理 1 と同様ロボットが静止しているので  $F_k = I, Q_k = \mathbf{0}$  となる。すると (43) 式より誤差共分散行列は  $W^{\dagger}$  を用いると以下のようになる。

$$P_k^{1^{-1}} = P_k^{0^{-1}} + H_k^{\dagger T} R_k^{\dagger^{-1}} H_k^{\dagger} - \gamma^2 I = P_k^{0^{-1}} + W^{\dagger} \quad (60)$$

ここで  $P_k^{0^{-1}}$  が正定値行列であるとする, (59) 式が満たされる時,  $P_k^1$  と  $P_k^0$  の関係は以下のようになる。

$$P_k^1 = (P_k^{0^{-1}} + W^{\dagger})^{-1} < P_k^0 \quad (61)$$

また  $P_k^i$  が正定値行列であるとする, (59) が満たされる時,  $P_k^{i+2}$  は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} P_k^{i+2} &= (P_k^{i+1^{-1}} + W^{\dagger})^{-1} \\ &= (P_k^{i^{-1}} + W^{\dagger} + W^{\dagger})^{-1} \\ &\leq (P_k^{i^{-1}} + W^{\dagger})^{-1} = P_k^{i+1} \end{aligned} \quad (62)$$

以上より帰納的に, ロボットが静止状態で誤差共分散行列が単調減少することが示される。□

ここで  $P_k^0$  の逆行列の各成分を以下のように定義する。

$$P_k^{0^{-1}} = \begin{bmatrix} P_{k11}^{-1} & P_{k12}^{-1} \\ P_{k21}^{-1} & P_{k22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (63)$$

するとロボットが静止時における誤差共分散行列の収束性について次の定理が成り立つ。

定理 3. 仮定 1-6 が成り立つとする。ここで静止したロボットがランドマークを観測した場合を考える。  $\gamma > 0$  でロボットが静止後に観測が  $n (> 0)$  回行われたとすると, 全状態共分散行列は以下のように収束する。また  $n \rightarrow \infty$  となるとき推定誤差共分散行列は  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_k^n = \mathbf{0}_{3+2M}$  となる。

$$P_k^n = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (64)$$

ここで,  $P_{11}$  はロボットに関する誤差共分散行列,  $P_{22}$  はランドマークに関する誤差共分散行列,  $P_{12}, P_{21}$  はロボットとランドマークに関する相互誤差共分散行列であり, 各成分は以下の計算で求めることができる。

$$P_{11} = n^{-1}(\Omega_{11} + nD - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21})^{-1} \quad (65)$$

$$P_{12} = -P_{11}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \quad (66)$$

$$P_{21} = -\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}P_{11} \quad (67)$$

$$P_{22} = \Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}P_{11}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} + n^{-1}\Omega_{22}^{-1} \quad (68)$$

ただし

$$\Omega_{ij} = n^{-1}P_{kij}^{-1} + W_{ij} \quad (69)$$

*Proof.* 定理 1 と同様ロボットが静止しているので  $F_k = I, Q_k = \mathbf{0}$  となる。すると (37) 式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} P_k^{i+1^{-1}} &= P_k^{i^{-1}} + W^{\dagger} \\ &= (P_k^{i-1^{-1}} + W^{\dagger}) + W^{\dagger} \\ &= P_k^{i-1^{-1}} + 2W^{\dagger} \\ &= \dots \end{aligned}$$

よってロボットが静止後に  $n$  回観測が行われた場合, 誤差共分散行列は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
P_k^{n-1} &= P_k^{0-1} + nW^\dagger \\
&= \begin{bmatrix} P_{k11}^{-1} & P_{k12}^{-1} \\ P_{k21}^{-1} & P_{k22}^{-1} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} W_{11} + D & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n\Omega_{11} + D & n\Omega_{12} \\ n\Omega_{21} & n\Omega_{22} \end{bmatrix} \quad (70)
\end{aligned}$$

これより、(70) 式に逆行列補題を用いて計算すると、全状態共分散行列  $P_k^n$  は (64) 式のようになり、各成分は (65)-(68) 式の計算で求められる。

ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると (64) 式の各成分は 0 に収束する。よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_k^n = 0_{3+2M}$  であることがわかる。これにより、定理が証明された。□

## 4 シミュレーション

まずはシミュレーションにより提案手法の有用性を確認する。

### 4.1 シミュレーション条件

ここで設計パラメータ  $\gamma$  を  $\gamma = 0.8$ , 事前に既知なランドマークとして  $(x_p, y_p) = (30, 200)$  とし、その他のパラメータはそれぞれ Table 1 の値を用いてシミュレーションを行った。また、与えた入力信号を Fig. 4, 5 に示した。なお、プロセス雑音、観測雑音は、上記の範囲内で一様分布する乱数信号を与えた。

Table 1: Simulation parameters

Parameter[Unit]	Symbol	Value
サンプリング時間 [s]	$T$	0.1
シミュレーション時間 [s]	$SimTime$	400
ロボットの初期状態	$x_v(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
ランドマーク座標 [cm]	$(x_i, y_i)$	(60, 100), (160, 200), (60, 240), (100, 20), (200, 350), (200, 50), (70, 400)
既知のランドマーク座標 [cm]	$(x_p, y_p)$	(30, 200)
初期推定誤差共分散行列	$P_{0v}$	$10^{-5} \times I_3$
初期推定誤差共分散行列	$P_{0m}$	$10^5 \times I_{10}$
フィルタ用のプロセス雑音の共分散行列	$Q$	$\begin{bmatrix} 10^{-6} \times I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
フィルタ用の観測雑音の共分散行列	$R$	$10^{-5} \times I_{14}$
プロセス雑音の幅	$Q_{u_{max}}$ $Q_{u_{min}}$	0.01 -0.01
観測誤差の幅	$R_{\theta_{max}}$ $R_{\theta_{min}}$ $R_{distance_{max}}$ $R_{distance_{min}}$	0.05 -0.05 0.5 -0.5

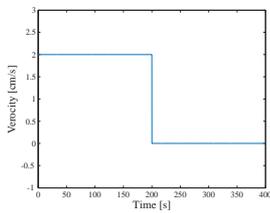


Fig. 4: Velocity

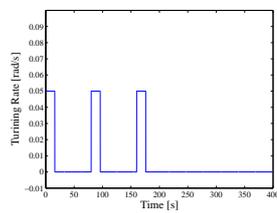


Fig. 5: Turning rate

### 4.2 シミュレーション結果

その結果は Fig.6-9 のようになり、それぞれロボットの自己位置及びランドマーク位置の推定結果、推定誤差共分散行列、ロボット及びランドマークの位置の推定誤差の平均二乗誤差における結果を示す。

まず Fig.7 の推定誤差共分散行列についてみると、もとの  $H_\infty$  フィルタが発散していた誤差共分散行列が、事前に位置が既知のランドマーク観測を加えることで観測性を満たした  $H_\infty$  フィルタ (Obs.HF) による結果では値が発散せずに逃避時間を回避していることがわかる。その値はもとの  $H_\infty$  フィルタによる値よりも小さくなっており、これより補題 1 が正しいことが確認できる。また、Fig.6 は推定結果を表わしており事前に既知なランドマークをピンク色の四角で示している。そして逃避時間を回避したことにより Fig.6 の推定結果でも Obs.HF では推定が最後まで行われている。

次に平均二乗誤差についてであるが、まず Fig.8 のロボットについての誤差をみると、Obs.HF を用いた推定では逃避時間回避を達成していることより、誤差も発散していないことがわかる。また各フィルタによる誤差の値を比べてみても、Obs.HF による誤差は KF による誤差よりも小さくなっており、Obs.HF を用いることによって推定精度が向上したことを確認できる。同様に Fig.9 のランドマークにおける平均二乗誤差においても、Obs.HF を用いた推定では誤差が発散せず、その大きさについても KF と Obs.HF を比べてみると Obs.HF のほうが誤差が小さくなっており、これより Obs.HF を用いることで推定精度が向上したことを確認できる。

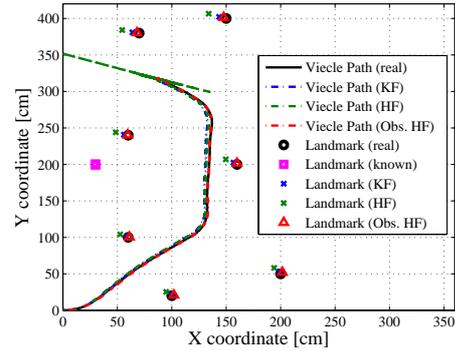


Fig. 6: Estimation result

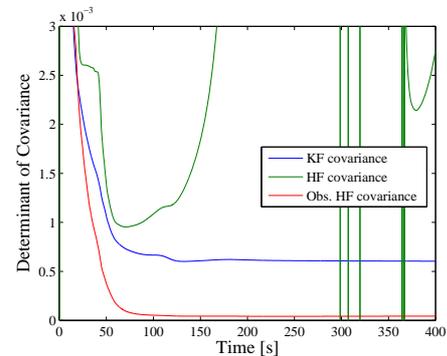


Fig. 7: Error covariance matrix

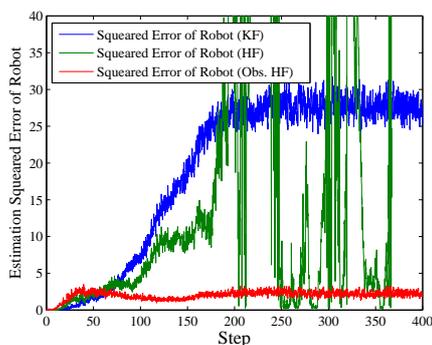


Fig. 8: MSE for robot estimation

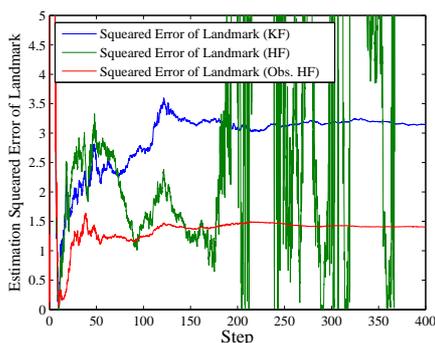


Fig. 9: MSE for landmark estimation

## 5 制御実験による検証

次に先ほど行ったシミュレーションプログラムと AmigoBot から得られたデータを用いて制御実験による検証を行う。

### 5.1 実験概要

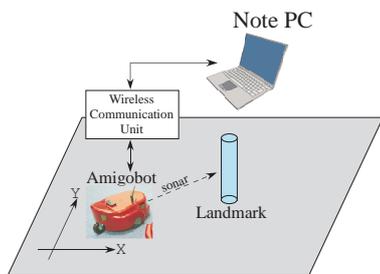


Fig. 10: Experimental environment

まず実験環境について説明する．実験環境を Fig. 10 に示した．移動ロボットには AmigoBot と呼ばれる独立 2 輪駆動型移動ロボットを用いる．無線 LAN により AmigoBot と PC 間でロボットの入力信号やオドメトリデータを送受信し，また，AmigoBot に搭載されたソナーセンサより，ロボットとランドマークの相対距離を観測した．これらのデータをオフラインで取得し，これを利用して Matlab 上で計算を行わせることで実機検証を行った．一方で，ロボットとランドマークの真値を計測するために，上からカメラで撮影しその映像を解析している．この情報も Matlab 上で計算し，真値と推定値との比較を行った．今回の実験では推定結

果と，ランドマークの平均二乗誤差，誤差共分散を評価する．平均二乗誤差を評価することにより，推定精度の比較検証を行う．誤差共分散を比較することにより，収束性の検証を行う．また，ソナーセンサによる観測を行っているので次の問題が生じる．ロボットの全方向とソナーセンサの相対角度は既知であるが，観測域が広がらないため正確な相対角度を求めることができない．そのため，本稿では相対角度については常に一定の角度の観測値が得られていると仮定して実験を行った．

### 5.2 実験条件

1 台の AmigoBot が 1 つのランドマークを中心に円運動した場合の，ロボットおよびランドマークの推定を実機検証した．実験の概略図を Fig. 11 に示した．観測開始時のロボットとランドマークの相対角度を 90[deg] であるとし，その後もロボットとランドマークを中心に半径 1[m] の円弧に印をつけ，これに沿って AmigoBot を移動させた．また実験におけるパラメータを以下のように設定し，与えた入力信号を Fig. 12 に示した．

Table 2: Experimental parameters

Parameter[Unit]	Symbol	Value
サンプリング時間 [s]	$T$	0.1
全ステップ数 [step]	$SimTime$	286
ロボットの初期状態	$x_r(0)$	$[0 \ 0 \ 0]^T$
ランドマーク座標 [mm]	$(x_l, y_l)$	(0,1132)
既知のランドマーク座標 [mm]	$(x_p, y_p)$	(600,600)
初期推定誤差共分散行列	$P_{0v}$	$10^{-5} \times I_3$
初期推定誤差共分散行列	$P_{0m}$	$10^5 \times I_2$
フィルタ用のプロセス雑音の共分散行列	$Q$	$\begin{bmatrix} 10^{-6} \times I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
フィルタ用の観測雑音の共分散行列	$R$	$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$
設計パラメータ	$\gamma$	16

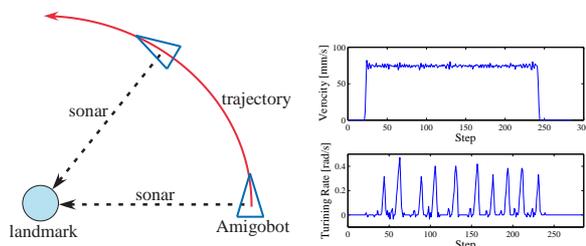


Fig. 11: Figure of the experiment

Fig. 12: Control input

### 5.3 実験結果

可観測性を満たした状態での実機データによる検証を Table 2 のパラメータの下で行った．事前に既知なランドマークは  $(x_p, y_p) = (600, 600)$  と設定した．

その結果は Fig.13-15 のようになり，それぞれロボットの自己位置およびランドマークの位置推定結果，推定誤差共分散行列，ランドマークの位置推定誤差の平均二乗誤差の結果である．ロボットの平均二乗誤差については，カメラのサンプリング時間とロボット内のサンプリング時間を同期させることができなかったので省略した．まず Fig.13 において，ピンク色の四角が事前に位置情報が既知なランドマークである．この口

ポットおよびランドマークの位置推定の結果より、既知のランドマーク観測を加えた Obs.HF を用いた結果では、KF やもとの  $H_\infty$  フィルタを用いた結果より真値に近い軌跡となっていることが確認できる。そして Fig.14 より、もとの  $H_\infty$  フィルタによる推定では、推定誤差共分散が実験開始後すぐに発散し、逃避時間が発生していたが、Obs.HF ではその回避を達成していることを確認することができる。そして、Fig. 15 より、もとの  $H_\infty$  フィルタによる推定ではその平均二乗誤差が途中で大きな値となっており、推定精度が悪化していたが、Obs.HF による推定結果では平均二乗誤差も途中で大きな値にはならず悪化していないことがわかる。また KF による結果と比べてみても、誤差が減少しており Obs.HF を用いることで推定精度が向上したことを確認できる。

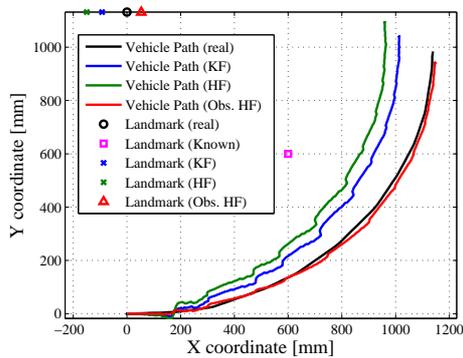


Fig. 13: Estimation result

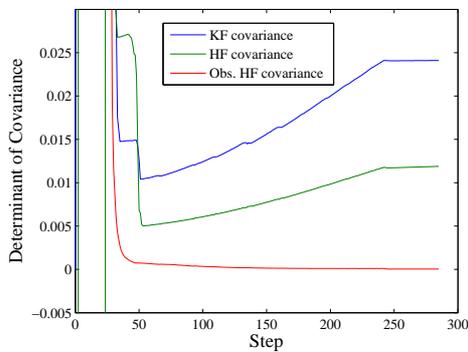


Fig. 14: Error covariance matrix

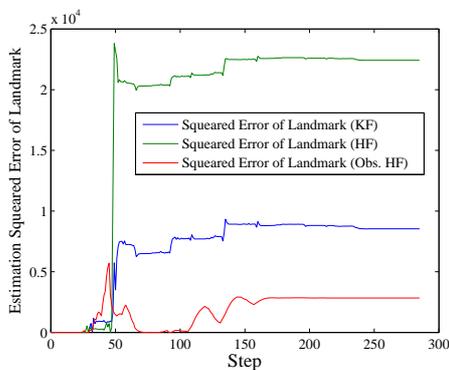


Fig. 15: MSE for landmark estimation

## 6 おわりに

本稿では事前に位置が既知であるランドマーク観測を加えた  $H_\infty$  フィルタを用いた移動ロボットの自己位置推定問題における可観測性と逃避時間回避について検証を行った。

まず可観測性については、未知のランドマーク観測に加え、1つの既知のランドマーク観測を加えることで、ヤコビ行列を用いて線形化したシステムが可観測性を満たすことを示した。また既知のランドマーク観測を加えることで、誤差共分散行列の値が抑えられ、逃避時間回避を達成した。そして収束性の証明として、移動ロボットが静止時に、アルゴリズムの更新につれて推定誤差共分散行列が収束することを示した。

さらにシミュレーションと制御実験による検証結果より、実際に推定誤差共分散行列が発散せずに収束し、逃避時間回避を達成していることを確認した。その収束結果より、推定が最後まで精度良く行われており、他のフィルタと比べて推定精度が向上していることを確認した。

## 参考文献

- 1) H. Durrant-Whyte and T. Bailey, Simultaneous localization and mapping; part 1, *IEEE Robotics and Automation Magazine*, **13**-2, 99/110 (2006)
- 2) H. Ahmad and T. Namerikawa, Robotic Mapping and Localization Considering Unknown Noise Statistics, *Journal of System Design and Dynamics*, **5**-1, 070/082 (2011)
- 3) K. P. B. Chandra, D. Gu and I. Postlethwaite, SLAM using EKF,  $EH_\infty$  and mixed  $EH_2/H_\infty$  filter, *Proc. of IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Yokohama, Japan, 818/823 (2010)
- 4) 大川佳寛, 宮野雄基, 滑川徹, 逃避時間回避を考慮した  $H_\infty$  フィルタによる移動ロボットの自己位置推定と環境認識, 第 54 回自動制御連合講演会, 13/18 (2011)
- 5) L. D. L. Perera, W. S. Wijesoma, and M. D. Adams, SLAM With Joint Sensor Bias Estimation: Closed Form Solutions on Observability, Error Bounds and Convergence Rates, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **18**-3, 732/740 (2010)
- 6) K. W. Lee, W. S. Wijesoma and J. I. Guzman, On the Observability and Observability Analysis of SLAM, *Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 3569/3574 (2006)
- 7) L.D.L. Perera, A. Melkumyan and E. Nettleton, On the Linear and Nonlinear Observability Analysis of the SLAM Problem, *Proc. of IEEE International Conference on Mechatronics*, 1/6 (2009)