第 54 回自動制御連合講演会
2011 年 11 月 19 日，20 日　豊橋技術科学大学

マルチロボットの協調自己位置推定と環境認識問題とその収束性解析

○大谷 達也　滑川 徹　（慶應義塾大学）

Multi-Robot Cooperative Localization and Mapping Problem and Its Convergence Analysis

∗T. Ohtani and T. Namerikawa (Keio Univ.)

Abstract– This paper deals with a Multi-Robot cooperative localization and mapping problem using extended kalman filter(EKF). We analyze the convergence of the error covariance matrix via EKF for two cases. One is a stationary-robot case and the other is a moving-robot one. The general convergence problems of the error covariance matrices can be shown. Finally attitude angle and $x-y$ positions of the moving two robots and one landmark can be precisely estimated via EKF in simulations and experience results.

Key Words: Multi-Robot Localization Mapping Convergence Cooparation EKF SLAM

1　はじめに

自律移動ロボットにおいて雑音を含むセンサ情報から自己の状態推定と環境の認識を同時に行うことは容易ではなく，これを SLAM(Simultaneous Localization And Mapping) 問題と呼ぶ．この問題に対し文献 [1] では 1 台のロボットと複数のランドマークからなるシステムについて H_∞ フィルタを用いて未知雑音下での推定問題を扱っている．また，文献 [2] [3] では同じ機構を持つ複数のロボットが互いを観測し，拡張カルマンフィルタ (EKF) を用いた複数台ロボットの協調自己位置推定を行う問題を扱っているが推定誤差の収束性について理論的には十分に議論されていない．

本稿では，複数の同機構ロボットとランドマーク群 (計 3 つ以上の対象) からなるシステム，Multi-Robot SLAM(Fig.1) を考え，各ロボットが他のロボットやランドマークを観測することで自身と相手の位置推定を同時に行う協調自己位置推定と環境認識問題を扱う．その際の推定結果と真値を比較し，推定誤差および誤差共分散を指標に精度に関して述べ，誤差共分散の収束性検証を行う．収束性解析では複雑化したシステムをいくつかのグループに分けて考え，各グループの解析結果を用いてシステム全体の誤差を表現し，最後にシミュレーションと実機検証により有効性を検証する．

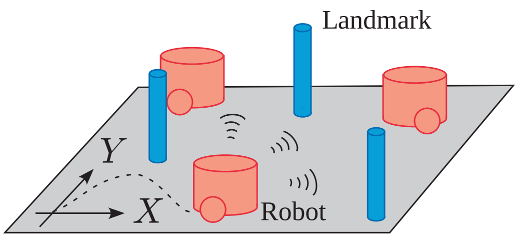

Fig. 1: Multi-Robot SLAM

2　問題設定

2.1　状態予測モデル

まず，同じ構造を持つ N 台のロボット群を考える．各ロボットの状態量は姿勢角と座標を含むとき，時刻 k におけるロボット群の状態ベクトル $\boldsymbol{x}_{R_k} \in \mathbb{R}^{3N\times 1}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{R_k} &= \begin{bmatrix}\theta_{R_{1_k}} & \boldsymbol{p}^T_{R_{1_k}} & \cdots & \theta_{R_{N_k}} & \boldsymbol{p}^T_{R_{N_k}}\end{bmatrix}^T \\ &\equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^T_{R_{1_k}} & \cdots & \boldsymbol{x}^T_{R_{i_k}} & \cdots & \boldsymbol{x}^T_{R_{N_k}}\end{bmatrix}^T \qquad (1)\end{aligned}$$

となる.$\boldsymbol{x}_{R_i} \triangleq \begin{bmatrix}\theta_{R_{i_k}} & \boldsymbol{p}^T_{R_{i_k}}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\theta_{R_{i_k}} & x_{R_{i_k}} & y_{R_{i_k}}\end{bmatrix}^T$ は i 番目のロボット (R_i) の状態を表し，姿勢角と位置を含んでいる．　また,R_i における状態遷移式 $\boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, v_{i_k}, \omega_{i_k})$ は次のように表される．

$$\theta_{R_{i_{k+1}}} = \theta_{R_{i_k}} + \omega_{i_k}\delta t + w^\theta_{i_k} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_{R_{i_{k+1}}} &= \boldsymbol{p}_{R_{i_k}} + \begin{bmatrix}v_{i_k}\delta t\cos\theta_{R_{i_k}} \\ v_{i_k}\delta t\sin\theta_{R_{i_k}}\end{bmatrix} + w^{xy}_{i_k} \\ &= \boldsymbol{p}_{R_{i_k}} + \boldsymbol{C}(\theta_{R_{i_k}})\,{}^k\boldsymbol{p}_{R_{i_{k+1}}} + w^{xy}_{i_k} \qquad (3)\end{aligned}$$

ここで

$$\boldsymbol{C}(\theta_{R_{i_k}}) = \begin{bmatrix}\cos\theta_{R_{i_k}} & -\sin\theta_{R_{i_k}} \\ \sin\theta_{R_{i_k}} & \cos\theta_{R_{i_k}}\end{bmatrix} \qquad (4)$$

$${}^k\boldsymbol{p}_{R_{i_{k+1}}} = \begin{bmatrix}v_{i_k}\delta t \\ 0\end{bmatrix} \qquad (5)$$

ω_{i_k}, v_{i_k} は入力加速度と入力速度，δt はサンプリング時間，$\boldsymbol{w}_{i_k} = \begin{bmatrix}w^\theta_{i_k} & \boldsymbol{w}^{xyT}_{i_k}\end{bmatrix}^T$ は共分散行列を $\boldsymbol{Q}_{i_k}$ とする平均 0 のガウス白色性プロセス雑音である．また,N 台のロボット群をまとめると次式となる．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\vdots \\ \boldsymbol{x}_{R_{i_{k+1}}} \\ \vdots\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\vdots \\ \boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, v_{i_k}, \omega_{i_k}) \\ \vdots\end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_{R_k} \\ \boldsymbol{x}_{R_{k+1}} &= \boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{x}_{R_k}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k) + \boldsymbol{w}_{R_k} \qquad (6)\end{aligned}$$

次にランドマークについて考える．各ランドマークが xy 座標の状態を持つとすると M 個からなるランド

11PR0002/11/0000-0007　¥400　2011 SICE

マーク群の状態ベクトル $\boldsymbol{L} = \mathbb{R}^{2M\times 1}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_k &= \begin{bmatrix} x_{L_{1_k}} & y_{L_{1_k}} & \cdots & x_{L_{M_k}} & y_{L_{M_k}} \end{bmatrix}^T \\ &\equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{L_{1_k}}^T & \cdots & \boldsymbol{p}_{L_{M_k}}^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{7}$$

と表される. ここで, ランドマークは静止しているものと仮定すると i 番目のランドマーク (L_i) 状態は次式となる.

$$\boldsymbol{p}_{L_{i_{k+1}}} = \boldsymbol{p}_{L_{i_k}} \tag{8}$$

ここで, ロボット群とランドマーク群を合わせた拡大行列を以下の様に定義する.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{R_{k+1}} \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{x}_{R_k}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k) \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{R_k} \\ \boldsymbol{0}_{2M\times 1} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k) + \boldsymbol{w}_k \end{aligned} \tag{9}$$

2.1.1 ヤコビ行列導出

R_i における状態遷移関数のヤコビ行列は

$$\boldsymbol{\Phi}_{i_k} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{x}_{R_k})}{\partial \boldsymbol{x}_{R_{i_k}}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -v_{R_{i_k}}\delta t \sin\theta_{R_{i_k}} \\ v_{R_{i_k}}\delta t \cos\theta_{R_{i_k}} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{0}_{1\times 2} \\ \boldsymbol{I}_2 \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{10}$$

となり, ロボット N 台とランドマーク M 台を含むシステム全体のヤコビ行列は次式となる.

$$\boldsymbol{\Phi_k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{R_k} & \boldsymbol{0}_{3N\times 2M} \\ \boldsymbol{0}_{2M\times 3N} & \boldsymbol{I}_{2M} \end{bmatrix} \tag{11}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\Phi}_{R_k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1_k} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Phi}_{N_k} \end{bmatrix} \tag{12}$$

2.2 観測モデル

ロボットはランドマークだけでなく他のロボットも観測できるので, 観測モデルは Robot-Robot 間観測 (R-R 観測) と Robot-Landmark 間観測 (R-L 観測) の二つを定義する必要がある. 以下に, それぞれについて述べる.

2.2.1 Robot-Robot 間観測

Robot-Robot 間観測は,Fig.2 のようなロボット間の相対姿勢角 $\theta_{R_iR_j}$ および相対位置 $(x_{R_iR_j}, y_{R_iR_j})$ を測定する.
これによって, 以下の 3 つの観測値を取得することができる.

- 観測者と被観測者の相対角度 $\theta_{R_iR_j}$
- 観測者座標軸における被観測者との相対角度 $\varphi_{R_iR_j} = \tan^{-1}\frac{y_{R_iR_j}}{x_{R_iR_j}}$
- 観測者と被観測者の相対距離 $r_{R_iR_j} = \sqrt{x_{R_iR_j}^2 + y_{R_iR_j}^2}$

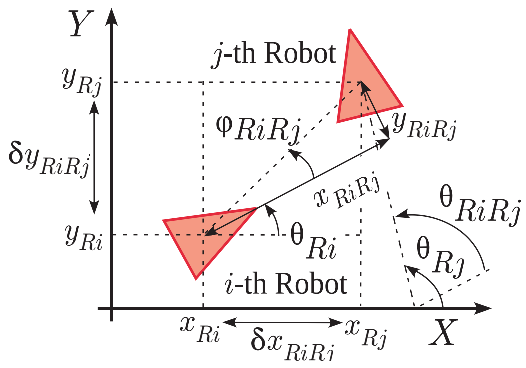

Fig. 2: MultiSLAM Robot-Robot relative pose

i 番目のロボットを観測者,j 番目のロボットを被観測者としたとき, 観測関数 $\boldsymbol{h}_R(\cdot)$ は次式となる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{R_iR_{j_k}} &= \begin{bmatrix} \theta_{R_iR_{j_k}} \\ \boldsymbol{p}_{R_iR_{j_k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{R_{j_k}} - \theta_{R_{i_k}} \\ \boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}})(\boldsymbol{p}_{R_{j_k}} - \boldsymbol{p}_{R_{i_k}}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_{R_iR_{j_k}} \\ &= \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{j_k}}) + \boldsymbol{v}_{R_iR_{j_k}} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\delta x_{R_iR_{j_k}} = x_{R_{j_k}} - x_{R_{i_k}}, \quad \delta y_{R_iR_{j_k}} = y_{R_{j_k}} - y_{R_{i_k}}$$

ここで, $\boldsymbol{v}_{R_iR_{j_k}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ は共分散行列を $\boldsymbol{R}_{R_iR_{j_k}}$ とする平均 0 のガウス白色性観測雑音である.

2.2.2 Robot-Landmark 間観測

Robot-Landmak 間観測は,Fig.3 のような相対位置 $(x_{R_iL_j}, y_{R_iL_j})$ を測定する.

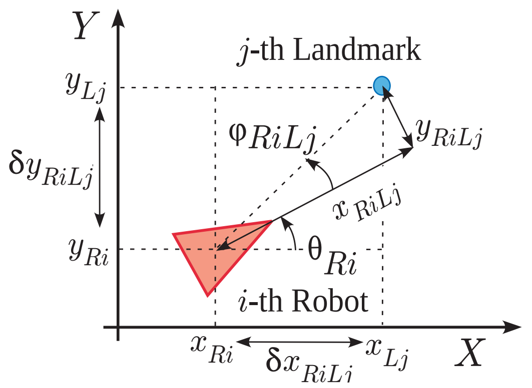

Fig. 3: MultiSLAM Robot-Landmark relative pose

これによって, 以下の 2 つの観測値を取得することができる.

- 相対角度 $\varphi_{R_iL_j} = \tan^{-1}\frac{y_{R_iL_j}}{x_{R_iL_j}}$
- 相対距離 $r_{R_iL_j} = \sqrt{x_{R_iL_j}^2 + y_{R_iL_j}^2}$

R_i を観測者,L_j を観測対象としたとき, 観測関数 $\boldsymbol{h}_L(\cdot)$ は次式となる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{R_iL_{j_k}} &= \boldsymbol{p}_{R_iL_{j_k}} = \boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}})(\boldsymbol{p}_{L_{j_k}} - \boldsymbol{p}_{R_{i_k}}) + \boldsymbol{v}_{R_iL_{j_k}} \\ &= \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{j_k}}) + \boldsymbol{v}_{R_iL_{j_k}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\delta x_{R_iL_{j_k}} = x_{L_{j_k}} - x_{R_{i_k}}, \quad \delta y_{R_iL_{j_k}} = y_{L_{j_k}} - y_{R_{i_k}}$$

ここで,$\boldsymbol{v}_{R_iL_{j_k}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ は共分散行列を $\boldsymbol{R}_{R_iL_{j_k}}$ とする平均 0 のガウス白色性観測雑音である.

R-R 観測および R-L 観測を合わせると観測モデルは次式となる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_k &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{1_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{2_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{1_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{N_k}}) \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{2_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{1_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{j_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{N-1_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{N_k}}) \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{N_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{1_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{N_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{N-1_k}}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{1_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{1_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{1_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{M_k}}) \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{2_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{1_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{j_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{N-1_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{M_k}}) \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{N_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{1_k}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{N_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{M_k}}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_k \\
&= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k
\end{aligned} \tag{15}
$$

ここで,$\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^{\{3N(N-1)+2NM\}\times 1}$ は共分散行列を $\boldsymbol{R}_k$ とする平均 0 のガウス白色性観測雑音である.

2.2.3 ヤコビ行列導出

まず始めに Robot-Robot 間観測について考える. R_i が観測者, R_j が被観測者のとき観測関数 $\boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{j_k}})$ のヤコビ行列は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i R_{j_k}} &= \frac{\partial \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{j_k}})}{\partial \boldsymbol{x}_{R_{i_k}}} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & \boldsymbol{0}_{2\times 1} \\ -\boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_{R_{j_k}} - \boldsymbol{p}_{R_{i_k}}) & -\boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}}) \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}_{1\times 2} \\ \boldsymbol{0}_{2\times 1} & \boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(\theta_{R_{i_k}})} \begin{bmatrix} -1 & \boldsymbol{0}_{1\times 2} \\ -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_{R_{j_k}} - \boldsymbol{p}_{R_{i_k}}) & -\boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{R_j}_{R_i R_{j_k}} &= \frac{\partial \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{x}_{R_{j_k}})}{\partial \boldsymbol{x}_{R_{j_k}}} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}_{1\times 2} \\ \boldsymbol{0}_{2\times 1} & \boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(\theta_{R_{i_k}})}
\end{aligned} \tag{17}
$$

となり, R_i における観測関数 $\boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}_{R_i}, \boldsymbol{x}_{R_j})$ $(i \neq j, j = 1, \cdots, N)$ のヤコビ行列は次式となる.

$$
\boldsymbol{H}_{R_{i_k}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_{i_k}} & \boldsymbol{0}_{3N(N-1)\times 2N} \end{bmatrix} \tag{18}
$$

$$
\boldsymbol{H}^{R_i}_{R_{i_k}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_i R_{1_k}} & \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i R_{1_k}} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ & \vdots & & & & \\ \boldsymbol{0} & \cdots\ \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i R_{j_k}} & \cdots\ \boldsymbol{H}^{R_j}_{R_i R_{j_k}} & & \cdots & \boldsymbol{0} \\ & \vdots & & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \cdots\ \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i R_{N-1_k}} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{H}^{R_{N-1}}_{R_i R_{N-1_k}} \end{bmatrix} \tag{19}
$$

次に,Robot-Landmark 観測を考える.R_i が L_i を観測するときのヤコビ行列は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i L_{j_k}} &= \frac{\partial \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{j_k}})}{\partial \boldsymbol{x}_{R_{i_k}}} \\
&= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_{L_{j_k}} - \boldsymbol{p}_{R_{i_k}}) & -\boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{L_j}_{R_i L_{j_k}} &= \frac{\partial \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_{i_k}}, \boldsymbol{p}_{L_{j_k}})}{\partial \boldsymbol{p}_{L_{j_k}}} \\
&= \boldsymbol{C}^T(\theta_{R_{i_k}})
\end{aligned} \tag{21}
$$

となり,R_i における観測関数 $\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}_{R_i}, \boldsymbol{p}_{L_j})$ $(j = 1, \cdots, M)$ のヤコビ行列は次式となる

$$
\boldsymbol{H}_{L_{R_{i_k}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_i}_{L_{R_{i_k}}} & \boldsymbol{H}^{L}_{L_{R_{i_k}}} \end{bmatrix} \tag{22}
$$

$$
\boldsymbol{H}^{R_i}_{L_{R_{i_k}}} = \begin{bmatrix} \cdots & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i L_{1_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i L_{j_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_i L_{M_k}} \end{bmatrix} & \cdots \end{bmatrix} \tag{23}
$$

$$
\boldsymbol{H}^{L}_{L_{R_{i_k}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{L_1}_{R_i L_{1_k}} & & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{H}^{L_j}_{R_i L_{j_k}} & \\ & & & \ddots \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{H}^{L_M}_{R_i L_{M_k}} \end{bmatrix} \tag{24}
$$

ここで,R-R 観測および R-L 観測におけるヤコビ行列をまとめると次式となり, システム全体における観測関数のヤコビ行列が求められた.

$$
\boldsymbol{H}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{R_{1_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{R_{i_k}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{R_{N_k}} \\ \boldsymbol{H}_{L_{R_{1_k}}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{L_{R_{i_k}}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{L_{R_{N_k}}} \end{bmatrix} \tag{25}
$$

3 推定誤差共分散行列の収束性

推定誤差共分散行列 $\boldsymbol{P}_{k|k} \in \mathbb{R}^6$ は推定の不確かさを表しており, 次のように定義される. ただし, $\hat{}$ をつけた変数はすべて元の変数の推定値を表す.

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = E[\{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} - \boldsymbol{x}_{k|k}\}\{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} - \boldsymbol{x}_{k|k}\}^T] \tag{26}$$

また, 本稿ではロボット 2 台とランドマーク 1 個の場合を考える. システム内の要素が 3 つ以上となると収束性解析が複雑化するため, 本稿では各要素を部分的に抽出し,2 つの要素間での収束証明を何度か行い, その合計値を各要素の収束値として表現する手法を試みた. 具体的には Robot1, Robot2, Landmark1 の 3 つから構成されるシステムを考え, Fig.4 の様に部分的なシステムグループを作る.

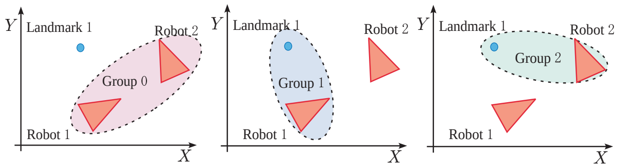

Fig. 4: Group

このとき, 上式 $\boldsymbol{P}$ は次のブロックに分けられ, 各グループの誤差共分散は次のようにあらわされる.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{R_1R_1} & \boldsymbol{P}_{R_1R_2} & \boldsymbol{P}_{R_1L_1} \\ \boldsymbol{P}_{R_2R_1} & \boldsymbol{P}_{R_2R_2} & \boldsymbol{P}_{R_2L_1} \\ \boldsymbol{P}_{L_1R_1} & \boldsymbol{P}_{L_1R_2} & \boldsymbol{P}_{L_1L_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 8} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{P}^{Gr0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{R_1R_1} & \boldsymbol{P}_{R_1R_2} \\ \boldsymbol{P}_{R_2R_1} & \boldsymbol{P}_{R_2R_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{P}^{Gri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{R_iR_i} & \boldsymbol{P}_{R_iL_1} \\ \boldsymbol{P}_{L_1R_i} & \boldsymbol{P}_{L_1L_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} i = 1, 2 \tag{29}$$

ただし, $\boldsymbol{P}_{R_iR_i}$ $(i = 1, 2)$ は各ロボットの誤差共分散行列, $\boldsymbol{P}_{L_1L_1}$ はランドマークの誤差共分散行列, $\boldsymbol{P}_{R_iR_j}, \boldsymbol{P}_{R_iL_1} (i \neq j)$ はロボットとロボットおよびロボットとランドマークの相互誤差共分散行列であり, 初期値をそれぞれ $\boldsymbol{P}_{R_iR_{j0}}, \boldsymbol{P}_{R_iL_{10}}$ と置く. また, 状態遷移行列 $\boldsymbol{\Phi}_k$ および観測関数行列 $\boldsymbol{H}_k$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Phi}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 8} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_1R_2} & \boldsymbol{H}^{R_2}_{R_1R_2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_2R_1} & \boldsymbol{H}^{R_2}_{R_2R_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_1L_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}^{L_1}_{R_1L_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}^{R_2}_{R_2L_1} & \boldsymbol{H}^{L_1}_{R_2L_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 8} \tag{31}$$

また, 上式を各グループに次のように分解する.

$$\boldsymbol{\Phi}^{Gr0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{Gri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \quad i = 1, 2 \tag{33}$$

$$\boldsymbol{H}^{Gr0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_1R_2} & \boldsymbol{H}^{R_2}_{R_1R_2} \\ \boldsymbol{H}^{R_1}_{R_2R_1} & \boldsymbol{H}^{R_2}_{R_2R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 & \boldsymbol{\Theta}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{H}^{Gri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{R_i}_{R_iL_1} & \boldsymbol{H}^{L_1}_{R_iL_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5} \quad i = 1, 2 \tag{35}$$

ただし, $\boldsymbol{\Theta}_{i_k} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ は観測行列における i 番目のロボットの列要素行列とする. また, $\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2$ について添え字 X をつけ $\boldsymbol{\Theta}_{1_X}$, $\boldsymbol{\Theta}_{2_X}$ と表現するとき, これはロボットが点 X にいる時の値であるとする. そして, $\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2$ は正則ではないので擬似逆行列を用いて $\boldsymbol{\Theta}_1^+, \boldsymbol{\Theta}_2^+$ とする.

以降, 収束性を示すため 2 つの場合に分けて考察する.

3.1 Gr.0 について

ロボット移動中は, ヤコビ行列 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k$, $\hat{\boldsymbol{H}}_k$ が常に変化し, 計算が複雑化するので, まずロボットが静止した状態について考える. このとき入力 0, ヤコビ行列 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k = \boldsymbol{I}$, プロセス雑音 $\boldsymbol{Q} = 0$ となるため, 証明が簡単になることから静止している状態での証明を行う. また, ロボットが移動する場合においてもロボットが静止している状態での結果を用いるので, ロボットが静止している場合の証明は重要になる. これまでに定義した $\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2$ について添え字 A をつけ $\boldsymbol{\Theta}_{1_A}$, $\boldsymbol{\Theta}_{2_A}$ と表現するとき, これは点 A における値であるとする. また,$\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2$ は正則ではないので擬似逆行列を用いて $\boldsymbol{\Theta}_1^+, \boldsymbol{\Theta}_2^+$ とする. ロボットの初期状態における位置を点 A とするとき, 次の補題が明らかである [4].

補題 1 システム (9)(15) 式において, 初期値が $\boldsymbol{P}_{R_1R_{20}}, \boldsymbol{P}_{R_1L_{10}}, \boldsymbol{P}_{R_2L_{10}} = 0$ を満たすとする. ロボットが静止している状態で, 観測回数が $k \to \infty$ となるとき推定誤差共分散行列はある一定値 $\boldsymbol{P}_\infty^{Gr0}$ に収束する.

$$\boldsymbol{P}_\infty^{Gr0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gr0} & -\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gr0}\boldsymbol{\Theta}_{1_A}^T(\boldsymbol{\Theta}_{2_A}^T)^+ \\ -\boldsymbol{\Theta}_{2_A}^+\boldsymbol{\Theta}_{1_A}\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gr0T} & \boldsymbol{\Theta}_{2_A}^+\boldsymbol{\Theta}_{1_A}\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gr0T}\boldsymbol{\Theta}_{1_A}^T(\boldsymbol{\Theta}_{2_A}^T)^+ \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gr0} = [\boldsymbol{P}_{R_1R_{10}}^{-1} + \boldsymbol{\Theta}_{1_A}^T(\boldsymbol{\Theta}_{2_A}^T)^+\boldsymbol{P}_{R_2R_{20}}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_{2_A}^+\boldsymbol{\Theta}_{1_A})]^{-1} \tag{37}$$

続いてロボットが移動している場合について述べる. 移動時には観測雑音 $\boldsymbol{R}$ 以外に, プロセス雑音である $\boldsymbol{Q}$ も加わるため, 推定誤差共分散行列の値を明確に数式化できない. また, 一定値に収束するとも限らない. そこで, 点 A(初期状態における位置) でロボットが静止している状態から始め, "静止 "と "移動 "を区別して考える. まず, 補題 1 を用いて $\boldsymbol{P}_{k|k}^{Gr0}$ が一定値に収束した後, 1 ステップだけロボットを移動させ, 静止させる. そして再度, 補題 1 を用いて $\boldsymbol{P}_{k+1|k+1}^{Gr0}$ の収束値を求め, これを繰り返すことで推定誤差共分散行列の振る舞いを調べる. ここで, 証明の準備として時刻 k (点 A とする) から 1 ステップ移動した直後 (点 B とする) の $\boldsymbol{P}_{k+1|k}^{Gr0}$ を以下のように新たに定義する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{k+1|k}^{Gr0} &= \boldsymbol{\Phi}_A^{Gr0}\boldsymbol{P}_{k|k}^{Gr0}\boldsymbol{\Phi}_A^{Gr0T} + \boldsymbol{Q} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1_A}\boldsymbol{P}_{R_1R_{1k|k}}\boldsymbol{\Phi}_{1_A}^T + \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{\Phi}_{1_A}\boldsymbol{P}_{R_1R_{2k|k}}\boldsymbol{\Phi}_{2_A}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{2_A}\boldsymbol{P}_{R_1R_{2k|k}}^T\boldsymbol{\Phi}_{1_A}^T & \boldsymbol{\Phi}_{2_A}\boldsymbol{P}_{R_2R_{2k|k}}\boldsymbol{\Phi}_{2_A}^T + \boldsymbol{Q}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{R_1R_{1k+1|k}} & \boldsymbol{P}_{R_1R_{2k+1|k}} \\ \boldsymbol{P}_{R_1R_{2k+1|k}}^T & \boldsymbol{P}_{R_2R_{2k+1|k}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_{B_0}^{Gr0} \end{aligned} \tag{38}$$

このとき, 次の補題が明らかである [4] より.

補題 2 各ロボットが点 A において相対的関係を保ったまま静止した状態で $k \to \infty$ となるまで観測した後, 1 ステップロボットを移動させ, さらに点 B において相

対的関係を保ったまま静止した状態で無限時間観測するとき，誤差共分散行列 $\boldsymbol{P}_{k|k}^{Gr0}$ は次式の $\boldsymbol{P}_{B}^{Gr0}$ となる．

$$\boldsymbol{P}_{B}^{Gr0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{B\infty}^{Gr0} & -\boldsymbol{P}_{B\infty}^{Gr0}\boldsymbol{\Theta}_{1_B}^{T}(\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{T})^{+} \\ -\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{+}\boldsymbol{\Theta}_{1_B}\boldsymbol{P}_{B\infty}^{Gr0T} & \boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{+}\boldsymbol{\Theta}_{1_B}\boldsymbol{P}_{B\infty}^{Gr0T}\boldsymbol{\Theta}_{1_B}^{T}(\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{T})^{+} \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{B\infty}^{Gr0} = \ & [\check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_1{}_{B0}} + \check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_2{}_{B0}}\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{+}\boldsymbol{\Theta}_{1_B} \\ & -\boldsymbol{\Theta}_{1_B}^{T}(\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{T})^{+}(\check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_1{}_{B0}} - \check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_2{}_{B0}}\boldsymbol{\Theta}_{2_B}^{+}\boldsymbol{\Theta}_{1_B})]^{-1}\end{aligned} \tag{40}$$

ただし，点 B に移動した時を $\boldsymbol{P}_{B0}$ とし，以下に定義する．

$$(\boldsymbol{P}_{B0}^{Gr0})^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_1{}_{B0}} & \check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_2{}_{B0}} \\ \check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_1{}_{B0}} & \check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_2{}_{B0}} \end{bmatrix} \tag{41}$$

続いて，$Gr.1, Gr.2$ について考える．

3.2 $Gr.1, Gr.2$ について

$Gr.0$ と同様にして Fig.4 の $Gr.1, Gr.2$ についても次の補題が明らかである [5].

補題 3 ロボットが静止している状態で，観測回数が $k \to \infty$ となるとき推定誤差共分散行列はある一定値 $\boldsymbol{P}_{\infty}^{Gri}$ に収束する．

$$\boldsymbol{P}_{\infty}^{Gri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gri} & \boldsymbol{P}_{12\infty}^{Gri} \\ \boldsymbol{P}_{12\infty}^{GriT} & \boldsymbol{P}_{22\infty}^{Gri} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gri} = \ & [\boldsymbol{P}_{R_iR_{i0}}^{-1} + \boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{L_1T})^{+} \\ & \cdot\boldsymbol{P}_{L_1L_{10}}^{-1}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{L_1})^{-1}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{R_i})]^{-1}\end{aligned} \tag{43}$$

$$\boldsymbol{P}_{12\infty}^{Gri} = -\boldsymbol{P}_{11\infty}^{Gri}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{L_1T})^{-1} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{P}_{22\infty}^{Gri} = (\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{L_1})^{-1}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{R_i}\boldsymbol{P}_{11\infty}^{GriT}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_A}^{L_1T})^{-1} \tag{45}$$

補題 4 状態 A で推定誤差共分散行列が補題 3 の値に収束するまでランドマークを観測した後，1 ステップだけロボットを移動させ，さらに静止した状態で l 回観測を行う．このとき観測回数を $l \to \infty$ とするとき，推定誤差共分散行列は次の値に収束する．

$$\boldsymbol{P}_{B}^{Gri} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11B\infty}^{Gri} & \boldsymbol{P}_{12B\infty}^{Gri} \\ \boldsymbol{P}_{12B\infty}^{GriT} & \boldsymbol{P}_{22B\infty}^{Gri} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{11B\infty}^{Gri} = \ & [\check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_1{}_{B0}}^{Gri} + \check{\boldsymbol{P}}_{R_1R_2{}_{B0}}^{Gri}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1})^{-1}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_i} \\ & -\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_iT}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1T})^{-1} \\ & \cdot(\check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_1{}_{B0}}^{Gri} - \check{\boldsymbol{P}}_{R_2R_2{}_{B0}}^{Gri}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1})^{-1}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_i})]^{-1}\end{aligned} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{P}_{12B\infty}^{Gri} = -\boldsymbol{P}_{11B\infty}^{Gri}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1T})^{-1} \tag{48}$$

$$\boldsymbol{P}_{22B\infty}^{Gri} = (\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1})^{-1}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_i}\boldsymbol{P}_{11B\infty}^{GriT}\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{R_iT}(\boldsymbol{H}_{R_iL_1{}_B}^{L_1T})^{-1} \tag{49}$$

以上より，$Gr.0, Gr.1, Gr.2$ 全てのグループにおける各要素の収束値が部分的に求められた．

ここで，補題,2,4 より (28)(29) 式の分解と逆の要領で各要素を対応させると，以下の定理が成り立つ．

定理 1 補題,2, 4 が成り立つとき，各ロボットおよびランドマークの推定誤差共分散行列は次の値に収束する．

$$\boldsymbol{P}_{\infty} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{R_1R_1}^{Gr0} + \boldsymbol{P}_{R_1R_1}^{Gr1} & \boldsymbol{P}_{R_1R_2}^{Gr0} & \boldsymbol{P}_{R_1L_1}^{Gr1} \\ \boldsymbol{P}_{R_2R_1}^{Gr0} & \boldsymbol{P}_{R_2R_2}^{Gr0} + \boldsymbol{P}_{R_2R_2}^{Gr2} & \boldsymbol{P}_{R_2L_1}^{Gr2} \\ \boldsymbol{P}_{L_1R_1}^{Gr1} & \boldsymbol{P}_{L_1R_2}^{Gr2} & \boldsymbol{P}_{L_1L_1}^{Gr1} + \boldsymbol{P}_{L_1L_1}^{Gr2} \end{bmatrix} \tag{50}$$

□(証明略.)

上式を用いて定理 1 の収束値の Simulation 検証を行う．

Table 1: Simulation の設定パラメータ

T[s]	0.1
T_{simu}[s]	4000
x_{v1}	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$
x_{v2}	$\begin{bmatrix}7\pi/4 & -150 & 200\end{bmatrix}^T$
P_{0v1}	$10^{-5} \times \boldsymbol{I}_3$
P_{0v2}	$10^{-5} \times \boldsymbol{I}_3$
P_{0m}	$10^{2} \times \boldsymbol{I}_2$
$Q_{vi}, i = 1, 2$	$10^{-5} \times \boldsymbol{I}_3$
$R - R$	diag{0.01,0.1,0.1}
$R - L$	diag{0.1,0.1}

4 シミュレーション検証

Table 1 のパラメータに従いシミュレーションを行った．

ここで，Ts はサンプリング時間，T_{simu} はシミュレーション時間，x_{v1}, x_{v2} は各ロボットの初期状態，P_{0v1}, P_{0v2}, P_{0m} は各ロボットとランドマークの初期誤差共分散，$Q_{vi}, i = 1,$ はプロセス雑音，$R - R, R - L$ は観測雑音である．Fig.5-7 に $t = 0[s]$ から $t = 2000$ まで静止し，その後 1 ステップだけ移動し，$t = 4000$ 静止し観測を続けた場合の推定誤差共分散の各要素の収束値を示す．

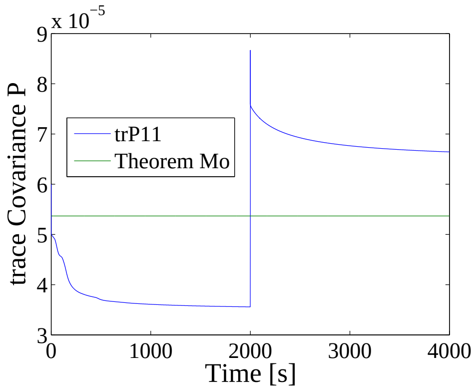

Fig. 5: R_1 の誤差共分散

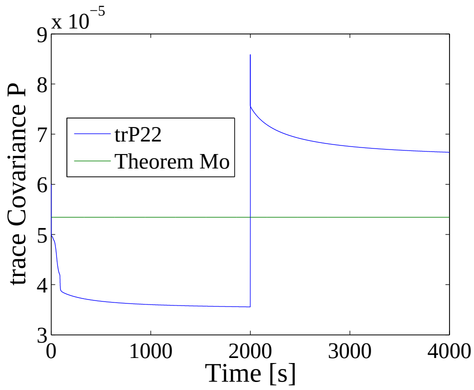

Fig. 6: R_2 の誤差共分散

Fig.5-7 より，補題 2,4 へ収束している様子がわかる．定理の値とシミュレーション結果がほぼ一致していることがわかり，定理が成立しているとわかる．以上の結果より，定理の正当性を確かめることができた．続いて，実機検証を行う．

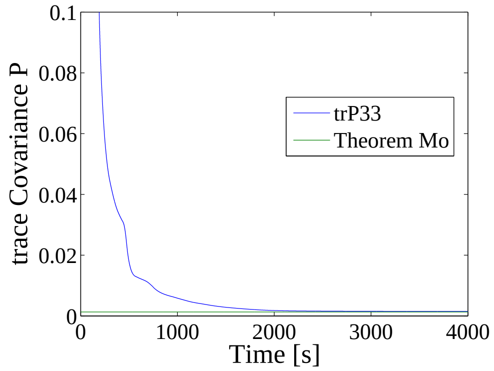

Fig. 7: L_1 の誤差共分散

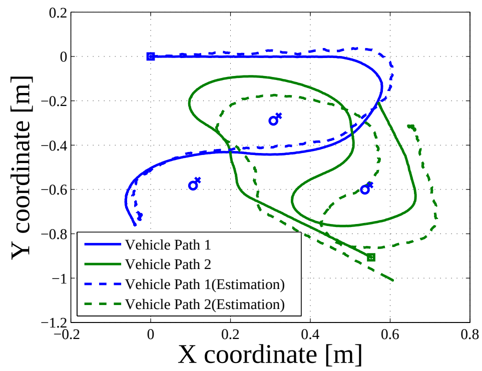

Fig. 9: 推定結果 $(X-Y)$

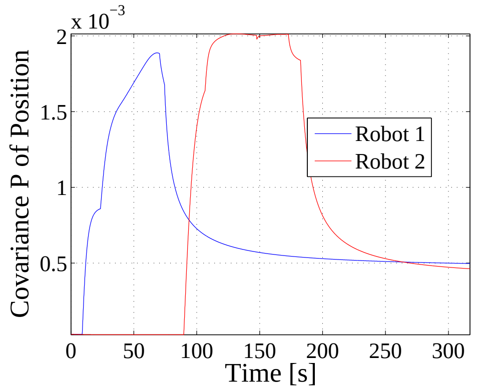

Fig. 10: R_1, R_2 の誤差共分散

5 実機検証

5.1 実験環境

全体図を Fig.8 に示す．移動ロボットには e-puck と呼ばれる独立二輪駆動型移動ロボットを用いており，Bluetooth 送信機を介して，PC より命令を送り操作することが可能である．本実験では，e-puck への制御入力は手動で決め，任意の移動が可能であるとする．

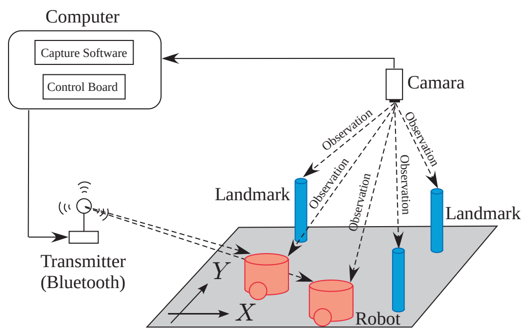

Fig. 8: 実験環境の全体図

また，e-puck には周囲の環境情報を取得するための外部センサを搭載していないため，本実験では上からカメラで撮影し，その映像を解析することによって仮想的にセンサを実現している．つなるカメラの映像から各 e-puck とランドマーク間の距離および相対角度を計算し推定器に入力する．PC の中では，拡張カルマンフィルタプログラムが構築されており，ロボットの自己位置推定と外部の環境地図作成を同時に推定することが可能である．

補題 2,4 では，ロボットを 1 ステップのみ動かしているが，本実験では推定結果と各ロボットにおける誤差共分散の安定性を確認するため，一定時間移動させ，その後静止した状態でシステムの観測を行う．

5.2 実験の設定

実験のパラメータは Simulation と同じく Table 1 に従い実験を行った．ただし，観測時間のみ $T_{exp} = 317[s]$ とした．このとき，推定結果と各ロボットの誤差共分散行列を Fig.9-10 に示す．実験ではロボット 1 を $t = 0$〜$70[s]$ の間だけ，ロボット 2 を $t = 90$〜$170[s]$ の間だけが移動させ，その後，約 $t = 300[s]$ まで静止した状態で観測を続けた．

Fig.9 の推定結果より，発散せず安定した推定が行われていることが確認できる．また，Fig.10 の誤差共分散値の値より，各ロボットが移動しているときは値が変化しており，静止しているときは一定値へ収束していることが分かる．

6 おわりに

本稿では，複数 (3 つ以上) のロボットとランドマークからなるシステム，Multi-Robot SLAM を考え，マルチロボットの協調自己位置推定と環境認識問題とその収束性解析を行い，Simulation によって定理の検証，実験によって有効性の検証を行った．今後の課題としては，ロボット間の通信途絶時の観測情報欠落にも対応できるアルゴリズムの構築が挙げられる．

参考文献

1) H. Ahmad and T. Namerikawa, "Robotic Mapping and Localization Considering Unkown Noise Statistics", *Proceedings of the 2010 IEEE Int. Conf. on Control Applications*, pp. 1275 - 1280, 2010.

2) Guoquan P. Huang, N. Trawny, Anstasios I. Mourikis, and Stergios I. Roumeliotis, "On the Consistency of Multi-robot Cooperative Localization", *Proceedings of the 2009 Robotics: Science and Systems Conference*, June, 2009

3) Zhou, X.S., and Stergios I. Roumeliotis, "Multi-robot SLAM with Unknown Initial Correspondence: The Robot Rendezvous Case", *Proceedings of the 2006 International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1785-1792, 2006

4) 大谷 達也，滑川 徹，"マルチロボットの協調自己位置推定問題と収束性解析"，第 55 回システム制御情報学会研究発表講演会，May, 2011

5) Shoudong Haung, and Gamini Dissanayake, "Convergence and Consistency Analysis for Extend Kalman Filter Based SLAM", *IEEE Transactionson on Robotics*, Vol.23, No.5, pp. 1036-1049, October, 2007