

拡張カルマンフィルタを用いた 移動ロボットの自己位置推定と環境認識

Simultaneous Localization and Mapping Problem using Extended Kalman Filter

○森本 祐介 (金沢大学), 正 滑川 徹 (慶應義塾大学)

Yusuke MORIMOTO, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192

Toru NAMERIKAWA, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa, 233-8522

Abstract: This paper deals with the Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) problem using Extended Kalman Filter. We analyze the convergence of the error covariance matrix of SLAM problems via EKF for the two cases. One is a stationary robot case and the other is a moving robot case. In simulation results evaluate the correctness of derived theorems for the convergence properties of the error covariance matrices. In experimental results, robot's state and environment information can be precisely estimated. Finally, the effectiveness of EKF-SLAM was shown.

Key Words: SLAM Problem, Extended Kalman Filter, Error Covariance Matrix, Convergence Analysis

1. はじめに

近年, 人が入るのに困難な場所の探索や, 建物の警備, 掃除など人々と同じ環境で働くことのできる自律的ロボットの開発が期待されている⁽¹⁾. これまで, 移動ロボットは床や壁などにマーカーを取り付けそれに沿って移動するなどの方法で実現されてきたが, これでは予め決められた経路でしか行動できず, 動的に変化する環境に柔軟に対応することが難しかった. これらの問題を解決するため, 移動ロボットを自律的に行動させる研究が盛んに行われている⁽²⁾.

自律的にロボットを行動させるためには, 地図など環境のモデルを予め用意する必要がある. ロボットは与えられた地図を用いて自己の位置を推定し, さらに移動経路を計画し目的地へどり着くことができる. しかし, 事前に環境の地図を与えることが難しい場合がある. 例えば, 建物の中で行動するロボットを考えると, 各建物毎に地図を与えているのではコストがかかってしまう. さらに, 屋内では机や椅子などが移動したり以前にはなかった物が現れるなど, 与えられた地図と一致しないことがある⁽³⁾. また, 災害現場で働くロボットや未知環境を探索するロボットなどの応用を考えると, 予め地図を与えることは困難となることが予想できる. このような, 地図が与えられていない状況において自律的にロボットを行動させる場合には, ロボットの自己位置推定と環境の地図作成を同時に解決しなければならない. この問題は, SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) 問題と呼ばれ様々な研究がされている⁽⁴⁾.

SLAM 問題を扱う際, 重要な問題となってくるのが不確かさへの対処法である⁽⁵⁾. ロボットの移動には, スリップや摩擦, モデル化誤差などによる不確かさが含まれており, センサによる観測にも観測雑音が含まれている. 不確かさが蓄積すると, 自己位置推定の誤差が大きくなり, 正確な地図は作成されず結局自分がどこにいるのか分からなくなるという悪循環を生んでしまう. この問題から, SLAM 問題では位置推定問題における不確かさの影響を小さくするような手法を考えなければならない. また, ロボットが観測する情報は, ロボットと環境間の相対的な情報であることが多く, 絶対的な情報を取得することが難しい. これらの理由から, SLAM 問題は複雑で難しい問題と考えられている⁽⁶⁾.

SLAM 問題に関する多くの従来研究では, 様々な物体を目印 (以下ランドマーク) として捉えると有用なことが多いため, 環境地図作成問題をランドマークの配置図作成問題と捉えて議論している⁽⁷⁾. そこで本稿でも, ランドマークの配置図作成について

議論する. この問題を扱う際に使用する推定アルゴリズムにはパーティクルフィルタを用いた手法などがあるが⁽⁸⁾, 計算量が多く, 次元の指数オーダーで計算複雑性が増加することから大きな空間を考える場合には問題がある⁽³⁾. 一方, 拡張カルマンフィルタを用いた手法では, 次元の 2 乗オーダーで計算複雑性が増加することから, 計算コストが低く, SLAM 問題において創成期から使われ現在でも議論されている.

拡張カルマンフィルタを用いた手法は, すでに文献⁽⁹⁾などで提案されている. 文献⁽⁹⁾では, 推定誤差の収束性についての証明が行われているが, ランドマークが複数個になったときの証明が十分でなく, またシミュレーションや制御実験による有効性の検証が行われていない. そこで, 本稿ではランドマークの数を一般化し, 移動ロボットが静止, 移動している場合について誤差共分散行列の収束性を証明する. さらにシミュレーションと実験によって拡張カルマンフィルタを用いた手法の有効性を確認する.

2. 問題設定

Fig. 1 にシステムの全体図を示す. 移動ロボットを取り巻く環境は XY 平面上に存在する N 個の点ランドマークによって構成されると仮定し, ロボットにこの N 個のランドマークの位置とロボット自身の自己位置を同時に推定させることを考える.

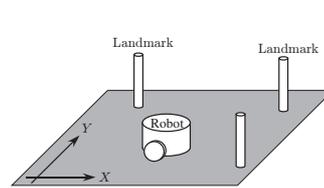


Fig. 1: 全体図

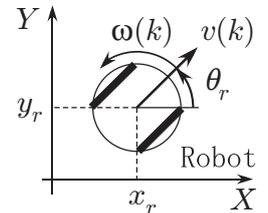


Fig. 2: 移動ロボット

Fig. 2 に移動ロボットの状態を示す. x_r, y_r, θ_r はそれぞれ, ロボットの X 座標, Y 座標, 姿勢角である. また, 速度 $v(k)$ と角速度 $\omega(k)$ を入力に持つロボットを考えると, ロボットの状態遷移は次のように表わされる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v(k+1) &= \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_v(k), \omega(k), v(k)) + \mathbf{e}_{1v}(k) \quad (1) \\ \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_v(k), \omega(k), v(k)) &= \begin{bmatrix} \theta_r(k) + T\omega(k) \\ x_r(k) + Tv(k) \cos \theta_r(k) \\ y_r(k) + Tv(k) \sin \theta_r(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_v(k) = [\theta_r(k) \ x_r(k) \ y_r(k)]^T \in \mathbb{R}^3$ はロボットの状態ベクトル, T はサンプリング周期, $\mathbf{e}_{1v}(k) \in \mathbb{R}^3$ はロボットに入力されるプロセス雑音である. また, i 番目のランドマークの XY 座標を $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i]^T \in \mathbb{R}^2$ とし, $\mathbf{p}_{all} = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \cdots \ \mathbf{p}_N^T]^T$ と置く. ここで, 移動ロボットとランドマークを一つの拡大システムと考え, システムの状態ベクトルを $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_v^T(k) \ \mathbf{p}_{all}^T]^T$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{3+2N}$ と置くと, システム全体の状態遷移は次のようになる.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \omega(k), v(k)) + \mathbf{e}_1(k) \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_v(k+1) \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_v(k), \omega(k), v(k)) \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1v}(k) \\ \mathbf{0}_{2N} \end{bmatrix}$$

ただし, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \omega(k), v(k)) \in \mathbb{R}^{3+2N}$ は状態遷移の非線形関数, $\mathbf{e}_1(k) \in \mathbb{R}^{3+2N}$ はシステムに入力されるプロセス雑音である. 次に観測方程式について考える.

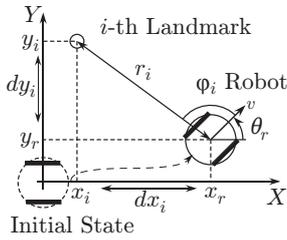


Fig. 3: 移動ロボットとランドマークの位置関係

Fig. 3 は i 番目のランドマークとロボットの位置関係を示している. ロボットに搭載されるセンサにより, ランドマークとの相対距離 r_i と相対角度 φ_i が取得できるとすると i 番目のランドマークを観測する際の観測方程式は以下ようになる.

$$\mathbf{z}_i(k) = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ r_i \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{2i}(k) = \begin{bmatrix} \text{atan} \left(\frac{dy_i/dx_i}{\sqrt{dx_i^2 + dy_i^2}} \right) - \theta_r(k) \\ \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{2i}(k) \quad (3)$$

$$dx_i = x_i - x_r, \quad dy_i = y_i - y_r$$

さらに, それぞれの観測量をまとめると以下となる.

$$\mathbf{z}_{all} = [\mathbf{z}_1^T \ \cdots \ \mathbf{z}_N^T]^T = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{e}_2(k) \quad (4)$$

ただし, $\mathbf{h}(\mathbf{x}(k))$ は観測を表す関数, $\mathbf{e}_{2i}(k)$ は i 番目のランドマークの観測に入力される雑音で, $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_1^T \ \mathbf{e}_2^T \ \cdots \ \mathbf{e}_N^T]^T$ となる. ここで以下の仮定を置く.

仮定 1. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は以下を満たす平均 $\mathbf{0}$ のガウス白色雑音である.

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T(k) & \mathbf{e}_2^T(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$E \{ \mathbf{e}_1(k) \mathbf{x}(0) \}, E \{ \mathbf{e}_2(k) \mathbf{x}(0) \} = \mathbf{0} \quad (6)$$

ただし, $\mathbf{Q} \geq 0, \mathbf{R} > 0$ である.

仮定 2. ランドマークは静止している.

仮定 3. センサの有効範囲は考慮しなくてよい.

仮定 4. ロボットは同時に N 個のランドマークを観測でき, それぞれを識別できる. また, あるランドマークが他のランドマークによって隠される場合を考慮しなくてよい.

3. 推定誤差共分散行列の収束性

本節では, 拡張カルマンフィルタについて簡単に説明し, 推定誤差共分散行列の収束性について解析を行う.

3-1. 拡張カルマンフィルタ ここでは, 拡張カルマンフィルタについて説明を行う. ただし, 本稿において $\hat{\cdot}$ をつけた変数はすべて推定値であるとする. システムの方程式が (2), (4) 式で与えられるとき, 拡張カルマンフィルタは以下に示す 3 ステップの再帰的処理により計算することができる.

Step1: 予測

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k|k), \omega(k), v(k)) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{all}(k+1|k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \hat{\mathbf{F}}(k) \mathbf{P}(k|k) \hat{\mathbf{F}}^T(k) + \mathbf{Q} \quad (9)$$

$$\mathbf{P}(i|j) \in \mathbb{R}^{(3+2N) \times (3+2N)}$$

Step2: 観測

$$\tilde{\mathbf{z}}(k+1|k) = \mathbf{z}_{all}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}_{all}(k+1|k) \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{z}}(k+1|k)$ は, イノベーションと呼ばれるものである.

Step3: 更新

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) \tilde{\mathbf{z}}(k+1|k) \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1) \hat{\mathbf{H}}(k) \mathbf{P}(k+1|k) \quad (12)$$

ただし, $\mathbf{K}(k+1)$ はカルマンゲインで次のように計算される.

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) \hat{\mathbf{H}}^T(k) \mathbf{S}^{-1}(k+1) \quad (13)$$

$$\mathbf{S}(k+1) = \hat{\mathbf{H}}(k) \mathbf{P}(k+1|k) \hat{\mathbf{H}}^T(k) + \mathbf{R} \quad (14)$$

また, $\mathbf{F}(k), \mathbf{H}(k)$ はヤコビ行列で,

$$\mathbf{F}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega, v)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v & \mathbf{0}_{3 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{2N \times 3} & \mathbf{I}_{2N \times 2N} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Tv(k) \sin \theta_r(k) & 1 & 0 \\ Tv(k) \cos \theta_r(k) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}(k) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = [\mathbf{H}_v \ \mathbf{H}_p] \quad (17)$$

ただし,

$$\mathbf{H}_v = [\mathbf{H}_{v1}^T \ \mathbf{H}_{v2}^T \ \cdots \ \mathbf{H}_{vN}^T]^T \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_p = \text{block diag} \{ \mathbf{H}_{p1}, \mathbf{H}_{p2}, \cdots, \mathbf{H}_{pN} \} \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_{vi} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{dy_i}{r_i} & \frac{dx_i}{r_i} \\ 0 & \frac{dx_i}{r_i} & \frac{dy_i}{r_i} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{pi} = \begin{bmatrix} -\frac{dy_i}{r_i} & \frac{dx_i}{r_i} \\ \frac{dx_i}{r_i} & \frac{dy_i}{r_i} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

以上が拡張カルマンフィルタアルゴリズムである. ここで, $\mathbf{P}(i|j)$ は推定誤差共分散行列と呼ばれ次のように定義される.

$$\mathbf{P}(i|j) = E \{ \{ \hat{\mathbf{x}}(i|j) - \mathbf{x}(i|j) \} \{ \hat{\mathbf{x}}(i|j) - \mathbf{x}(i|j) \}^T \} \quad (21)$$

このとき, $\mathbf{P}(i|j)$ は次のようにブロックに分解することができる.

$$\mathbf{P}(i|j) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{vv}(i|j) & \mathbf{P}_{vm}(i|j) \\ \mathbf{P}_{vm}^T(i|j) & \mathbf{P}_{mm}(i|j) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
P_{vv}(i|j) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} & : \text{ ロボットの推定誤差共分散行列} \\
P_{mm}(i|j) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} & : \text{ ランドマークの推定誤差共分散行列} \\
P_{vm}(i|j) \in \mathbb{R}^{3 \times 2N} & : \text{ 相互誤差共分散行列}
\end{aligned}$$

推定誤差共分散行列は、推定の不確かさを表していたため、 \mathbf{P} の収束性を確認することが重要な問題となっている。以降では、推定誤差共分散行列の収束性をロボットが静止している場合と移動した場合について分けて考える。

3-2. 推定誤差共分散行列の収束性 (静止している場合) ロボットが移動している間は、ヤコビ行列 $\hat{\mathbf{F}}(k)$, $\hat{\mathbf{H}}(k)$ が常に変化し計算が複雑になるためまず、ロボットが静止している状態を考える。静止している場合には、 $\hat{\mathbf{F}}(k) = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ となるため計算が容易になる。ここで、これまで定義した $\mathbf{H}_v, \mathbf{H}_p, \mathbf{H}_{vi}, \mathbf{H}_{pi}$ について、添え字 \mathbf{A} を付け $\mathbf{H}_{vA}, \mathbf{H}_{pA}, \mathbf{H}_{vA}, \mathbf{H}_{pA}$ と表現するとき、これは点 \mathbf{A} における値であるとする。ロボットの初期状態における位置を点 \mathbf{A} とするとき、以下の定理が成り立つ。

定理 1. ロボットが静止している状態で、観測回数が $k \rightarrow \infty$ となるとき推定誤差共分散行列はある一定値 \mathbf{P}_∞ に収束する。

$$\mathbf{P}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{v\infty} & \mathbf{P}_{v\infty} \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \\ \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{v\infty}^T & \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{v\infty}^T \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{v\infty} = \left[\mathbf{P}_{0v}^{-1} + \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \mathbf{P}_{0m}^{-1} \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \right]^{-1} \quad (24)$$

ただし、 $\mathbf{P}(0|-1) = \text{block diag} \{ \mathbf{P}_{0v}, \mathbf{P}_{0m} \}$

Proof. (12) 式に (13) 式を代入して変形すると、

$$\mathbf{P}^{-1}(k|k) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \hat{\mathbf{H}}^T(k-1) \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{H}}(k-1) \quad (25)$$

となる。この漸化式を解くと、

$$\mathbf{P}^{-1}(k|k) = \mathbf{P}^{-1}(0|0) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\mathbf{H}}^T(i) \mathbf{R}^{-1}(i) \hat{\mathbf{H}}(i) \quad (26)$$

ここで、(26) 式の第 2 項について考える。ヤコビ行列 $\hat{\mathbf{H}}(k)$ は、推定値 $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ の値を使って計算されるため、ロボットが静止していたとしても観測雑音の影響により真値付近で変動する。そのため、推定誤差共分散行列がどのような値に収束するかを厳密に計算することはできない。ただし、ここでは厳密な値を導出することではなく、収束性の確認をするため推定値 $\hat{\mathbf{H}}(k)$ の値を真値に置き換えて議論する。推定値 $\hat{\mathbf{H}}(k)$ の真値を \mathbf{H}_A とすると、(26) 式は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}(k|k) &= \mathbf{P}^{-1}(0|0) + k \mathbf{H}_A^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_A \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0v}^{-1} + k \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{vA} & -k \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{pA} \\ -k \mathbf{H}_{pA}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{vA} & \mathbf{P}_{0m}^{-1} + \mathbf{H}_{pA}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{pA} \end{bmatrix} \quad (27)
\end{aligned}$$

となる。次に、上式の逆行列を求め $k \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{P}_\infty \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{v\infty} & \mathbf{P}_{v\infty} \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \\ \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{v\infty}^T & \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{v\infty}^T \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{v\infty} = \left[\mathbf{P}_{0v}^{-1} + \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \mathbf{P}_{0m}^{-1} \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \right]^{-1} \quad (29)$$

となり、推定誤差共分散行列の収束性を確認できた。 \square

注意 1. (23), (24) 式から、推定共分散行列 $\mathbf{P}(k|k)$ の下限は、推定共分散誤差共分散行列の初期値 $\mathbf{P}_{0v}, \mathbf{P}_{0m}$ が含まれていることがわかる。一般に、SLAM 問題を扱う場合には、 \mathbf{P}_{0m} を十分大きな値を取るため、 $\mathbf{P}_{0m}^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$ となる。これは、初期状態において

自己位置の推定値の信頼度を上げ、ランドマークの推定値の信頼度を下げるためである。これを考慮すると、(23) 式は、

$$\mathbf{P}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0v} & \mathbf{P}_{0v} \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \\ \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{0v}^T & \mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} \mathbf{P}_{0v}^T \mathbf{H}_{vA}^T \mathbf{H}_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。

3-3. 推定誤差共分散行列の収束性 (移動した場合) ロボットが移動している場合にはヤコビ行列 $\hat{\mathbf{F}}(k)$, $\hat{\mathbf{H}}(k)$ が環境や入力に影響され常に変動し、またプロセス雑音が存在し $\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$ となるため推定誤差共分散行列がある一定値に収束することを厳密に計算することは難しい。そこで、文献⁽⁹⁾では、点 \mathbf{A} (初期状態における位置) でロボットが静止している状態から始め、定理 1 の値に収束した後に 1 ステップ分だけロボットに入力を与え推定誤差共分散行列の振る舞いを調べている。本稿でも、同様に考える。まず、推定誤差共分散行列の収束性解析を行う前に、計算途中で必要となる補題について述べる。

補題 1. 点 \mathbf{A} から 1 ステップだけロボットを移動させたときの移動先を点 \mathbf{B} とする。点 \mathbf{B} まで移動するときのロボットのヤコビ行列を \mathbf{F}_{vA} とすると次の関係式が成り立つ。

$$\mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} = \mathbf{H}_{pB}^{-1} \mathbf{H}_{vB} \mathbf{F}_{vA} \quad (31)$$

Proof. 点 \mathbf{A} を (x_A, y_A) , 点 \mathbf{B} を (x_B, y_B) とすると、ロボットの座標について点 \mathbf{A} と点 \mathbf{B} での関係は (1) 式より次の式で表される。

$$\begin{aligned}
x_B &= x_A + v_b T \cos(\theta_A) \\
y_B &= y_A + v_b T \sin(\theta_A)
\end{aligned} \quad (32)$$

θ_A は点 \mathbf{A} でのロボットの姿勢角、 v_b は入力速度である。 i 番目のランドマークとの x, y 軸方向の相対距離を $dx_{iA}, dy_{iA}, dx_{iB}, dy_{iB}$ と置くと、

$$\begin{aligned}
dx_{iB} - dx_{iA} &= -v_b T \cos(\theta_A) \\
dy_{iB} - dy_{iA} &= -v_b T \sin(\theta_A)
\end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $\mathbf{e} = [1 \ 0]^T$ と置けば (33) 式は、次のように表現できる。

$$\mathbf{H}_{piA}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{H}_{piB}^{-1} \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -v_b T \sin(\theta_A) \\ v_b T \cos(\theta_A) \end{bmatrix} \quad (34)$$

次に、 $\mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA}$ の項について考える。

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{pA}^{-1} \mathbf{H}_{vA} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{p1}^{-1} \mathbf{e} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{pN}^{-1} \mathbf{e} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{p1B}^{-1} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} -v_b T \sin(\theta_A) \\ v_b T \cos(\theta_A) \end{bmatrix} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{pNB}^{-1} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} -v_b T \sin(\theta_A) \\ v_b T \cos(\theta_A) \end{bmatrix} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{H}_{pB}^{-1} \mathbf{H}_{vB} \mathbf{F}_{vA}
\end{aligned} \quad (35)$$

以上より補題が成り立つことが分かる。 \square

ロボットが移動した場合の推定誤差共分散行列の収束性については次の定理が成り立つ。

定理 2. 点 \mathbf{A} で推定誤差共分散が (23) 式の値に収束するまでランドマークを観測した後、1 ステップだけロボットを移動させ、

さらに静止した状態で l ステップを観測するとき、推定誤差共分散行列は次の値に収束する。

$$P_B(l) = \tilde{P}_{B0} + \begin{bmatrix} (Q_v^{-1} + lH_{vB}^T R^{-1} H_{vB})^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{2N \times 3} & \mathbf{0}_{2N \times 2N} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{P}_{B0} = \begin{bmatrix} F_{vA} P_{v\infty} F_{vA}^T & F_{vA} P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \\ H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T F_{vA}^T & H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (37)$$

さらに、 $l \rightarrow \infty$ とすると推定誤差共分散行列は次の値に収束する。

$$P_B(l) = \tilde{P}_{B0} \quad (38)$$

Proof. 点 **B** に着いたときの推定誤差共分散行列を P_{B0} とすると、(9) より、

$$P_{B0} = \begin{bmatrix} P_{B0v} & P_{B0vm} \\ P_{B0mv} & P_{B0m} \end{bmatrix} = \hat{F}_A P_\infty \hat{F}_A^T + Q \quad (39)$$

ただし、 \hat{F}_A は点 **A** において入力を与えられた瞬間の値であり、点 **A** にいる時のロボットの姿勢角を θ_A 、入力速度を v_b とすると

$$\hat{F}_A = \begin{bmatrix} \hat{F}_{vA} & \mathbf{0}_{3 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{2N \times 3} & \mathbf{I}_{2N \times 2N} \end{bmatrix}, \hat{F}_{vA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -T v_b \sin \theta_A & 1 & 0 \\ T v_b \cos \theta_A & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

定理 1 より、

$$P_{B0v} = \hat{F}_{vA} P_{v\infty} \hat{F}_{vA}^T + Q_v \quad (41)$$

$$P_{B0vm} = \hat{F}_{vA} P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \quad (42)$$

$$P_{B0m} = H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \quad (43)$$

となる。よって、点 **A** から点 **B** に移動したときの推定誤差共分散行列が求まった。次に、ロボットを静止させて l ステップ観測した場合の値を調べる。(26) 式を求めたのと同様に漸化式を解く。 k_{B0} を、ロボットが点 **B** に到着したときの時刻であるとし、 $P^{-1}(k_{B0} + l | k_{B0} + l) = P_B^{-1}(l)$ と置けば、

$$P_B^{-1}(l) = P_{B0}^{-1} + \sum_{t=0}^{l-1} \hat{H}_B^T(k_{B0} + t) R^{-1} \hat{H}_B(k_{B0} + t) \quad (44)$$

となる。 $P_B(l)$ は、点 **B** に到達してから l ステップ観測したときの推定誤差共分散行列である。定理 1 のときと同様に、 \hat{H}_B を真値 H_B に置き換えると、

$$P_B(l) = \{P_{B0}^{-1} + lH_B^T R^{-1} H_B\}^{-1} \\ = P_{B0} - P_{B0} H_B^T \{l^{-1} R + H_B P_{B0} H_B^T\}^{-1} H_B P_{B0} \quad (45)$$

となる。ここで、上式の $H_B P_{B0}$ の項について展開する。

$$H_B P_{B0} \\ = [-H_{vB} P_{B0v} + H_{pB} P_{B0mv} \quad -H_{vB} P_{B0vm} + H_{pB} P_{B0m}] \\ = [G_1 \quad G_2] \quad (46)$$

と置く。このとき、(41)-(43) 式を上式に代入すると、

$$G_1 \\ = -H_{vB} F_{vA} P_{v\infty} F_{vA}^T - H_{vB} Q_v + H_{pB} H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T F_{vA}^T \\ = H_{pB} (H_{pA}^{-1} H_{vA} - H_{pB}^{-1} H_{vB} F_{vA}) P_{v\infty} F_{vA}^T - H_{vB} Q_v \\ = -H_{vB} Q_v \quad (\because \text{補題 1}) \quad (47)$$

$$G_2 \\ = -H_{vB} F_{vA} P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} + H_{pB} H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \\ = H_{pB} (H_{pA}^{-1} H_{vA} - H_{pB}^{-1} H_{vB} F_{vA}) P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \\ = \mathbf{0}_{2N \times 2N} \quad (\because \text{補題 1}) \quad (48)$$

となる。(46) 式に、(47)、(48) 式を代入し、さらに (45) 式に代入すると、

$$P_B(l) = \tilde{P}_{B0} + \begin{bmatrix} P_{Bvl} & \mathbf{0}_{3 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{2N \times 3} & \mathbf{0}_{2N \times 2N} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\tilde{P}_{B0} = \begin{bmatrix} F_{vA} P_{v\infty} F_{vA}^T & F_{vA} P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \\ H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T F_{vA}^T & H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$P_{Bvl} = Q_v - Q_v^T H_{vB}^T \{l^{-1} R + H_B P_{B0} H_B^T\}^{-1} H_{vB} Q_v \quad (51)$$

となる。また、(51) 式に (46)-(48) を代入すると、

$$P_{Bvl} = Q_v - Q_v^T H_{vB}^T \{l^{-1} R + H_{vB} Q_v H_{vB}^T\}^{-1} H_{vB} Q_v \\ = (Q_v^{-1} + lH_{vB}^T R^{-1} H_{vB})^{-1} \quad (52)$$

以上より、次の式が導かれる。

$$P_B(l) = \tilde{P}_{B0} + \begin{bmatrix} (Q_v^{-1} + lH_{vB}^T R^{-1} H_{vB})^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{2N \times 3} & \mathbf{0}_{2N \times 2N} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$l \rightarrow \infty$ とすると、

$$P_B(l) = \tilde{P}_{B0} \quad (54)$$

以上により定理が成立することが分かる。□

注意 2. 定理 2 を繰り返し用いれば、 m ステップ移動した場合についても同様に求めることができる。つまり、点 **A** から始めて、点 $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{m-1} \rightarrow B$ のように移動した場合には、推定誤差共分散行列は次のようになる。

$$P_{AB\infty} = \begin{bmatrix} F_{vAB} P_{v\infty} F_{vAB}^T & F_{vAB} P_{v\infty} H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \\ H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T F_{vAB}^T & H_{pA}^{-1} H_{vA} P_{v\infty}^T H_{vA}^T H_{pA}^{-T} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$F_{vAB} = F_{vB} F_{vB(m-1)} \dots F_{vB1} F_{vA} \quad (56)$$

以上の結果から、十分に観測回数が増えれば推定誤差が収束することがわかり、拡張カルマンフィルタを SLAM 問題に適用できることがわかる。

4. シミュレーションと実験による検証

4-1. シミュレーションによる定理の検証 本節では、3 節で説明した定理が成立するかをシミュレーションにより検証する。まず、シミュレーションのパラメータを次に示す。

サンプリング時間 [s]	: $T = 0.1$
シミュレーション時間 [s]	: 5000
ロボットの初期状態 $x_v(0)$: $[0 \ 0 \ 0]^T$
ランドマークの座標 [cm]	: $(-20, -250), (60, -120)$
初期推定誤差共分散行列 P_{0v}	: $10^{-3} \times I_3$
初期推定誤差共分散行列 P_{0m}	: $10^4 \times I_{12}$
プロセス雑音の共分散行列 Q	: $Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} \times I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
観測雑音の共分散行列 R	:

$$R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

まず、定理 1 について検証する。証明では、ロボットは初期状態のまま無限時間観測を行うため、制御入力は与えない。また、 $\hat{H}_A(k)$ には真値を用いたことから、観測に雑音は与えず、 $Q = \mathbf{0}$

でシミュレーションを行った。このとき、推定誤差共分散行列のトレースを取ったものを Figs. 4, 5 に示す。

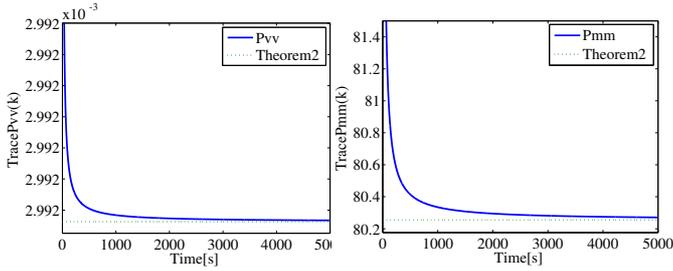


Fig. 4: Trace $P_{vv}(k)$

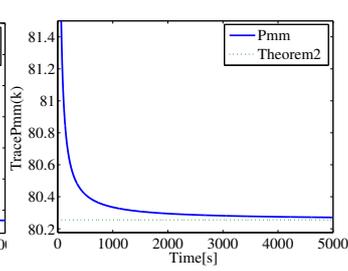


Fig. 5: Trace $P_{mm}(k)$

Figs. 4, 5 から、ロボットの推定誤差共分散行列もランドマークの推定誤差共分散も定理 1 (23) 式の値に収束している様子がわかる。また、定理 1 と 5000[s] におけるシミュレーション結果の詳しい値を Table 1 に示す。

Table 1: 定理 1 とシミュレーション結果の比較 ($k = 5 \times 10^4$)

trace P_{vv}	定理 1 の結果	シミュレーションの結果
	0.00299197452561	0.00299197453403
trace P_{mm}	定理 1 の結果	シミュレーションの結果
	80.25474389226071	80.27075871140562

この結果から、定理 1 とシミュレーションの結果が一致していることがわかる。

次に、定理 2 について検証する。証明では、はじめは静止した状態で誤差共分散行列が収束するまで観測し、その後 1 ステップだけすすめた後、収束性を解析するという方法で証明を行っていた。この条件に近づくようにシミュレーションを行った。具体的には、静止した状態で 2500[s] まで観測し、時刻 2500.1[s] でロボットに $v = 1[\text{cm/s}]$, $\omega = 0[\text{rad/s}]$ の制御入力を与え、時刻 2500.2[s] から再び静止させる。また、このシミュレーションでも同様に観測雑音は加えず、 Q はロボットを移動させる時以外は 0 となるように設定した。このとき、推定誤差共分散行列のトレースを取ったものを Figs. 6, 7 に示す。

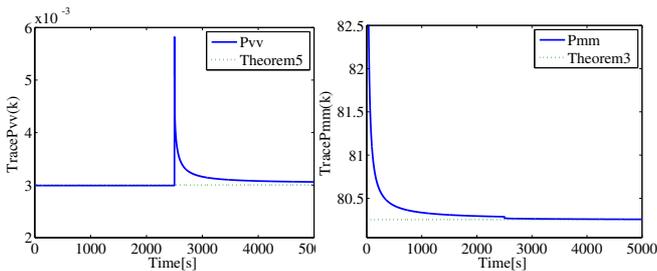


Fig. 6: Trace $P_{vv}(k)$

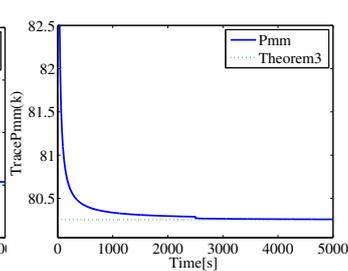


Fig. 7: Trace $P_{mm}(k)$

Figs. 6, 7 から、シミュレーションの結果が定理 2 の値に収束している。Fig. 6 では、2500.1[s] で不確かさが増えていることがわかる。これは、ヤコビ行列 \hat{F}_A や Q の影響であると考えられる。一方、Fig. 7 では、2500.1[s] の時刻でも変化がなく、 \hat{F}_A や Q の影響を受けていないことがわかる。これは、定理 2 のランドマークの推定誤差共分散行列がヤコビ行列 \hat{F}_A と関係ないことに対応づけられる。最後に、5000[s] におけるシミュレーション結果と定理の値を比較する。

Table 2: 定理 2 とシミュレーション結果の比較 ($k = 5 \times 10^4$)

trace P_{vv}	定理 2 の結果	シミュレーションの結果
	0.00300189348127	0.00306041252822
trace P_{mm}	定理 2 の結果	シミュレーションの結果
	80.25474389226071	80.25662784124167

Table 2 から定理 2 とシミュレーションの結果が一致していることがわかる。以上により、定理 1, 2 は成立していることがわかる。

4-2. 実験による有効性の検証 本節では、拡張カルマンフィルタを用いた手法の有効性を実験により検証を行う。実験装置の概要を Fig. 8 に示す。

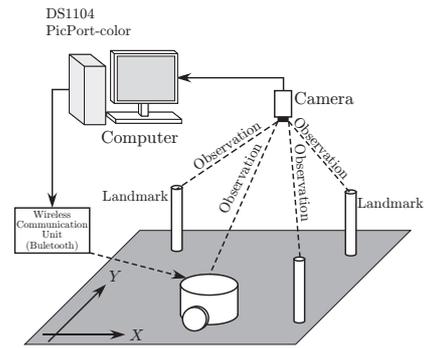


Fig. 8: 実験装置の概要

実験には、移動ロボットとして独立 2 輪駆動ビークルを用いた。また、ランドマークを観測するセンサは、ロボットに直接搭載する代わりに上方からカメラで撮影しコンピュータ内で仮想的に実現した。具体的には、カメラの画像を Luetron Vision 社製画像入力ボード PicPort-color を用いてコンピュータに取り込み、コンピュータ内で移動ロボットとランドマーク間の相対距離と相対角度を算出させている。また、移動ロボットの制御、および移動ロボットの自己位置とランドマークの位置推定には、dSPACE 社製の DS1104 を用いた。まず、以下に実験に用いたパラメータを示す。

サンプリング時間 [s]	: $T = 0.1$
シミュレーション時間 [s]	: 1000
ロボットの初期状態 $\mathbf{x}_v(0)$: $[0 \ 0 \ 0]^T$
ランドマークの数 N	: 9
初期推定誤差共分散行列 \mathbf{P}_{0v}	: $10^{-3} \times \mathbf{I}_3$
初期推定誤差共分散行列 \mathbf{P}_{0m}	: $10^4 \times \mathbf{I}_{12}$
プロセス雑音の共分散行列 \mathbf{Q}	: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \times \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
観測雑音の共分散行列 \mathbf{R}	:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

また、移動ロボットに与えた制御入力を Fig. 9 に示す。

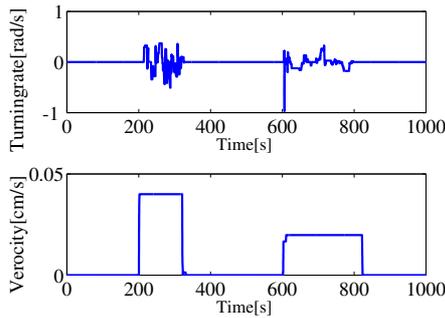


Fig. 9: 移動ロボットに与えた制御入力

Fig. 9からは、およそ 200 [s] から 400 [s] の間と、およそ 600 [s] から 800 [s] の間だけロボットが移動しそれ以外では静止することがわかる。まず、推定結果を XY 座標にプロットしたものを Fig. 10 に示す。

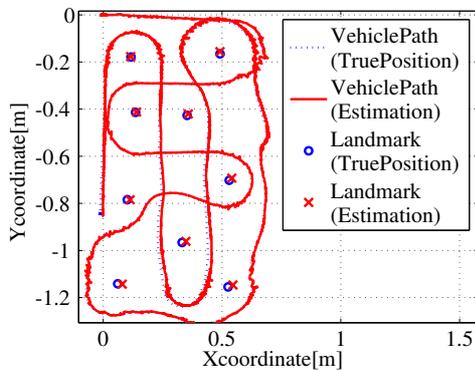


Fig. 10: 推定結果

Fig. 10 から自己位置の推定とランドマークの位置推定ができていることがわかる。次に、推定誤差について検討を行う。

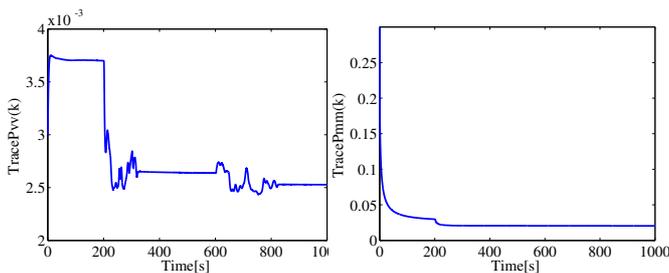


Fig. 11: trace Pvv(k)

Fig. 12: trace Pmm(k)

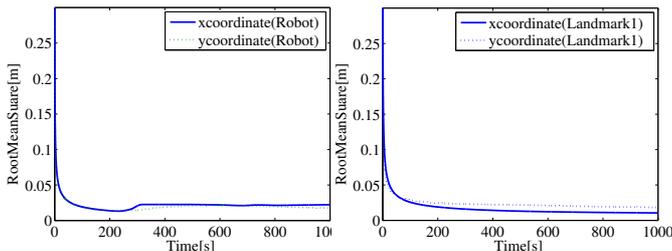


Fig. 13: 推定の平均二乗誤差
(ロボットの位置推定)

Fig. 14: 推定の平均二乗誤差
(ランドマークの位置推定)

まず、Figs. 11, 12 について考察する。これらは、推定誤差共分散行列のトレースを取ったものである。Fig. 11 から、推定誤差共分散行列はロボットが移動している間は複雑に変動しているが、ロボットが静止している間は一定値に収束している様子がわかる。Fig. 12 では、ロボットが移動しているしていないにもかかわらず一定値に収束していることがわかる。これらの結果は、定理 1, 2 の結果が成り立っていることを裏付けている。最後に、Figs. 13, 14 を見る。これらは、真値と推定値の平均二乗誤差である。初期状態では誤差が大きいが、時間が経つにつれ小さな値に収束している様子がわかる。以上により、拡張カルマンフィルタを用いた手法は自己位置の推定と環境認識問題への応用に有効であることがわかる。

5. おわりに

本稿では、文献^(6,9)を参考に拡張カルマンフィルタを用いた移動ロボットの自己位置推定と環境認識問題について検証を行い、推定誤差共分散行列の収束性について証明を行った。推定誤差共分散行列の収束性解析については、シミュレーションにより正当性の確認を行った。最後に、実験を行うことで拡張カルマンフィルタを用いた手法が有効であることを確認した。

なお、拡張カルマンフィルタの代わりに、 H_∞ フィルタを用いた結果について文献⁽¹⁰⁾で示されている。

参考文献

- (1) 大野 和則, 竹内 栄二郎, 坪内 孝司, “投光型距離センサを用いた三次元 SLAM”, 日本ロボット学会誌, Vol. 26, No. 4, pp. 306-309, 2008.
- (2) 竹澤 聡, “同時自己位置地図獲得手法を用いた自律型ロボットの環境認識”, 日本機械学会論文集, Vol.71, No.703, pp. 904-911, 2005.
- (3) Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox, 上田 隆一 訳, “確率ロボティクス”, 毎日コミュニケーションズ, 2007.
- (4) 白井 良明, “三次元環境認識と行動計画の歴史と展望”, 日本ロボット学会誌, Vol. 26, No. 4, pp. 302-305, 2008.
- (5) Juan D. Tardós, José Neira, Paul M. Newman, John J. Leonard, “Robust mapping and localization in indoor environments using sonar data,” *International Journal of Robotics Research*, 21 (4), pp. 311-330, 2002.
- (6) M. W. M. G. Dissanayake, P. Newman, S. Clark, H.F Durrant-Whyte and M.Csorba, “A Solution to the Simultaneous Localization and Map Building (SLAM) Problem,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 3, 2001.
- (7) 友納 正裕, 山崎 公俊, “三次元物体のモデリング・認識とロボティクスへの応用”, 日本ロボット学会誌, Vol. 26, No. 4, pp.318-321, 2008.
- (8) Ruben Martinez-Cantin, Nando de Freitas and José A. Castellanos “Analysis of particle methods for simultaneous robot localization and mapping and a new algorithm,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, art. no. 4209445, pp. 2415-2420, 2007.
- (9) M. W. M. G. Dissanayake and Shoudong Huang, “Convergence and Consistency Analysis for Extended Kalman Filter Based SLAM,” *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 23, No. 5, 2007.
- (10) H. Ahmad, T. Namerikawa, “ H_∞ filtering Convergence and It’s Application to SLAM,” ICCAS-SICE Int. Joint Conf 2009. (to be published)