GIMC構造に基づく \mathcal{L}_2 性能を考慮したAnti-Windup制御

中島裕介 滑川徹 (金沢大学)

Anti-Windup Control based on GIMC Structure which Considers \mathcal{L}_2 Performance

*Y. Nakashima and T. Namerikawa (Kanazawa University)

Abstract– This paper deal with an anti-windup control system design based on GIMC structure. Firstly, we develop the expression for \mathcal{L}_2 performance criterion. As the result, the design problem is formulated as a optimization problem of parametorization Q. Then we calculate the optimization problem and find an optimal Q. Finally, the effectiveness of proposed method is shown by experimental result for magnetic suspension system.

Key Words: Anti-Windup control, GIMC structure, Magnetic suspension system, Unstable system, \mathcal{L}_2 performance

1 はじめに

実システムにおける多くのアクチュエータは、出力可 能な振幅が限られている.このようなシステムに対し て高性能を要求した場合、入力が大きく飽和してしまい 制御性能が著しく劣化したり、ときには不安定化を招 く Windup 現象が生じる.Anti-Windup(AW) 制御の 目的は、制御入力の飽和が生じても制御系の安定性を維 持し、良好な過渡応答を達成することである.

AW 制御は古くからさまざまな研究が行われ,多く の研究成果が報告されている^{1)_8)}. 文献⁴⁾ では AW 性 能の評価指標として, 飽和を含まない仮想的線形制御系 と AW 制御系のプラント出力の誤差の \mathcal{L}_2 ノルムが提 案されている. この手法を用いると, 飽和時における閉 ループ系の安定性と過渡応答を同時に考慮することが 可能である. この \mathcal{L}_2 性能指標を用いた系統的な設計法 として,⁵⁾ ではコントローラの左規約分解に基づく動 的 AW 制御器の設計法が示されている. さらに,⁶⁾ で は設計条件を LMI に帰着し, 静的 AW 制御器を設計す る方法が紹介されており, 数値例により動的補償器と同 等の性能が得られることが示されている. しかし, これ らの手法に基づく設計法では入力飽和に対する領域的 な安定性を考慮していないため不安定な制御対象へ直 接的には使うことができない.

また⁷⁾⁸⁾では Youla パラメトリゼーションに基づく AW 制御系の設計が行われている.⁷⁾の手法は追従性 能を最適化し,かつ閉ループ系を安定にするプラントの 右既約分解をLMIにより設計する方法である.それに 対し⁸⁾は制御器の左既約分解に基づく方法であり,極 配置とオブザーバ構造に着目した設計法を提案してい る.これらの手法では,ある特定の目標値や入力飽和な どに対して最適な性能や安定性を補償することができ るが,もしこれらが変化した場合必ずしも制御性能を補 償できるとはかぎらない.

その点において、近年さかんに研究が行われている 非線形ゲインアルゴリズムを用いた手法は有用である ⁹⁾.⁹⁾では、オブザーバにより制御対象の状態を推定 し、その推定値をもとにリアルタイムで最適化問題を解 くことでローゲイン制御器とハイゲイン制御器のスケ ジューリングを行っている.

一方, 耐故障制御の分野では GIMC(Generalized Internal Model Control) 構造が注目されている¹⁰⁾.

GIMC 構造は、制御対象の状態に応じて、高性能な制 御器とロバストな制御器の切替ができる制御系であり、 不安定系に対しての検証実験により有効性が示されて いる¹¹⁾.またこの構造は内部信号の大きさにより制御 器を切替えることができるため、ゲインスケジューリン グを用いた方法より簡単かつ計算負荷が少なく、実用上 有用であると考えられる.

そこで本稿では、入力飽和を制御対象の変動と考え、 GIMC 構造を入力飽和がある制御系に適用し AW 制御 器を設計する.本稿では、まず GIMC 構造を用いた制 御系に対し、文献⁶⁾を参考に \mathcal{L}_2 性能指標を導出する. この際、入力飽和に対して領域的安定性を考慮し制御対 象が不安定な場合の設計法へ拡張する.次に最適化計 算により性能を最適化する、すべての安定化制御器のパ ラメータ表現 Q を求める.最後に、不安定系である磁 気浮上システムを用いた制御実験により提案手法の有 効性を示す.

2 準備と問題設定

本章ではまず GIMC 構造について説明し, 制御対象 の変動として入力飽和のみを扱うための等価変換した 制御系について説明する. また本稿で扱う飽和と不感 帯について定義する.

2.1 GIMC 構造

Fig. 1 に GIMC 構造を示す. ただし, \tilde{P} は線形時不 変な制御対象, P は制御対象のノミナルモデル, K_0 は ノミナル制御器である. また \tilde{M}, \tilde{N} は制御対象のモデ ルの左既約分解要素, \tilde{V}, \tilde{U} はノミナル制御器の左既約 分解要素であり, それぞれ以下のように表される.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{bmatrix}$$
(1)

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p + L_p C_p & B_p + L_p D_p & L_p \\ \hline C_p & D_p & I \end{bmatrix}$$
(2)

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} & \tilde{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k + L_k C_k & B_k + L_k D_k & L_k \\ \hline C_k & D_k & I \end{bmatrix} (3)$$

$$\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{V}, \tilde{U} \in \mathcal{RH}_{\infty}$$
 (4)



Fig. 2: 入力飽和を考慮した GIMC 構造

ただし, L_p , L_k はそれぞれ $A_p + L_pC_p \ge A_k + L_kC_k$ を 安定にする行列である. GIMC 構造では, 制御対象に変 動がない場合 ($\tilde{P} = P$), 対象はノミナル制御器 K_0 で 制御されるが, 変動が生じた場合 ($\tilde{P} \neq P$), 内部信号 zが有効となり以下のロバスト制御器 K で制御されるこ とになる.

$$K(s) = (\tilde{V} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{U} + Q\tilde{M})$$
(5)

$$det(\tilde{V} - Q\tilde{N})(\infty) \neq 0, \quad Q \in \mathcal{RH}_{\infty}$$
(6)

このように GIMC 構造では, 内部信号によって制御器 の切替が可能となる.本稿では, 入力飽和を制御対象の 変動とみなし, 飽和発生時に(5)式の制御器へ切替える ことで, 安定性を保持しつつ飽和の出力への影響を最小 にすることを目的とする.

ここで,制御対象の変動として入力飽和のみを扱うた めに Fig. 1 から Fig. 2 へ等価変換を行う. このとき以 下のような仮定をおく.

仮定 1 制御対象はノミナルモデルと完全に一致する とする. つまり

$$\tilde{P} = P \tag{7}$$

2.2 飽和と不感帯

飽和要素 Φ_f と不感帯要素 Ψ_f は f > 0 を用いて以下のような式で表される.

$$\Phi_f(u) = \begin{cases} f & \text{if } u > f \\ u & \text{if } -f < u < f \\ -f & \text{if } -f > u \end{cases}$$
(8)

$$\Psi_f(u) = \begin{cases} u-f & \text{if } u > f \\ 0 & \text{if } -f < u < f \\ u+f & \text{if } -f > u \end{cases}$$
(9)

$$\Psi_f(u) = u - \Phi_f(u) \tag{10}$$

ただし, f = 1の場合は $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ のように, fを省略 する. また, $F = diag(f_1, \dots, f_n)$, $f_i > 0$ とするとき, 多 変数飽和要素を $\Phi_F(u) = (\Phi_{f1}(u_1), \dots, \Phi_{fn}(u_n))^T$ で,



Fig. 3: 不感帯要素とセクタ条件



多変数不感帯要素を $\Psi_F(u) = (\Psi_{f1}(u_1), \dots, \Psi_{fn}(u_n))^T$ で定義する. ただし F = I のとき F は省略する. ここ で不感帯要素 Ψ_{f_i} はセクタ [0, c] (0 < c < 1) で覆われ るとする. つまり

$$0 \le \frac{\Psi_{f_i}(u_i)}{u_i} \le c, \quad \forall u \ne 0, \quad \Psi_{f_i}(0) = 0$$
(11)

が成り立つとする.

3 *L*₂ 性能を考慮した AW 制御

ここでは前章で示した GIMC 型 AW 制御系をもと に、⁶⁾で紹介されている手法を用いて飽和時の *L*₂ 性能 指標を導出し、安定化制御器のパラメータ表現 *Q* が満 たすべき条件について示す.

Fig. 4 に仮想線形制御系を示す.本稿では、この飽 和がなく理想的な応答を出力する Fig. 4 と AW 制御 系 Fig. 2 の出力の差を小さくすることを考える. Fig. 2,4より、AW 制御系と仮想線形制御系の入出力の偏差 $\hat{y} - y, u - u_{lin}$ は以下のように表される.

$$\hat{y} - y = -P(G+I)\tilde{u} \tag{12}$$

$$u - u_{lin} = -G\tilde{u} \tag{13}$$

ただし,

$$G = -(I + PK_0)^{-1}(PK_0 + \tilde{V}^{-1}Q\tilde{N})$$
(14)

である.このとき以下の設計問題について考える. 問題 1 (12), (14) 式について,以下の \mathcal{L}_2 ゲイン γ を最小化するパラメータ $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ を設計せよ.

$$||\hat{y} - y||_{\mathcal{L}_2} \le \gamma \Psi(u_{lin}) \tag{15}$$

ここで、(15)式を導出するために、不感帯要素 Ψ_F に 関する以下の補題を導入する.

補題 1 任意の $F = diag(f_1, \dots, f_n) > 0$ および $x, y \in R^n$ について考える. ただし, x, y は $\Psi_F(x), y \in \mathcal{L}_{2[0,T)}$ を満たすものとする. このとき次の関係が成立する.

$$|\Psi_F(x+y)||_{\mathcal{L}_{2[0,T)}} \le ||\Psi_F(x)||_{\mathcal{L}_{2[0,T)}} + ||y||_{\mathcal{L}_{2[0,T)}}$$
(16)

この補題を用いることにより、以下の定理が成立する. 定理 1 任意の $F = diag(f_1, \dots, f_n), f_i > 0, K =$



F(G+I)-K Fig. 6: **等価部分システム**

 $diag(k_1, \dots, k_n), 0 < k_i < 1$ について、次式を満たす Q が存在するものとする.

$$||F(G+I) - K||_{\infty} < 1 \tag{17}$$

G

 \tilde{u}

さらに, $\Psi(u_{lin}) \in \mathcal{L}_2$ であるとき, (15) 式の γ は以下 のように与えられる.

$$\gamma = \frac{||F|||P(G+I)||_{\infty}}{I - ||F(G+I) - K||_{\infty}}$$
(18)

Proof. (13) 式をブロック線図で表すと, Fig. 2 と安定 性の点で等価なシステム Fig. 5 が得られる. また Fig. 6 は Fig. 5 を *F*, *K* を用いて等価変換したものである. Fig. 6 と補題 1, (17) 式より

 $||\tilde{u}||_{\mathcal{L}_2[0,T)} \leq$

$$\frac{||F||}{1 - ||F(G+I) - K||_{\infty}} ||\Psi(u_{lin})||_{\mathcal{L}_{2}[0,T)}$$
(19)

となる. また (12) 式から

$$\begin{aligned} ||\hat{y} - y||_{\mathcal{L}_{2}[0,T)} &= || - P(G + I)\tilde{u}||_{\mathcal{L}_{2}[0,T)} \quad (20) \\ &\leq ||P(G + I)||_{\infty} ||\tilde{u}||_{\mathcal{L}_{2}[0,T)} \quad (21) \end{aligned}$$

であるので、(21) 式に(19) 式を代入することで

$$\begin{aligned} ||\hat{y} - y||_{\mathcal{L}_{2}} &\leq \frac{||F||||P(G+I)||_{\infty}}{1 - ||F(G+I) - K||_{\infty}} ||\Psi(u_{lin})||_{\mathcal{L}_{2}} \\ &= \gamma ||\Psi(u_{lin})||_{\mathcal{L}_{2}} \end{aligned}$$

が導かれる.

(18) 式より、 γ を最小化するためには (17) 式を満た しながら、分子の項を最小化すればよいことがわかる.

注意 1 (17)式の制約条件は入力飽和に対する安定条件となっていることに注意する.スカラ系の場合,(17)式は以下の式で表される.

$$|f(G(j\omega)+1) - k| < 1, \forall \omega \tag{22}$$



Fig. 8: 切替型 AW 制御系

ここで $G = \alpha + j\beta$ と置くと, 簡単な計算により

$$\left(\alpha + 1 - \frac{k}{f}\right)^2 + \beta^2 < \left(\frac{1}{f}\right)^2 \tag{23}$$

と表されることから、制約条件を満たすとき Gのナイ キスト軌跡は Fig. 7 に示す中心 $(\frac{k}{f} - 1, 0)$ 、半径 $\frac{1}{f}$ の 円内部に存在することが分かる.また円板条件 ¹²⁾より Gのナイキスト軌跡が $(-\frac{1}{c}, 0)$ を通る虚軸に平行な直 線の右側にあれば Fig. 5 のシステムはセクタ [0, c] に 対して \mathcal{L}_2 安定である.このことからセクタの大きさは 設計パラメータ f, kを用いて

$$c = \frac{f}{f+1-k} \tag{24}$$

とおくことができ、入力飽和に対する安定領域を考慮して設計することが可能である. ただし、(18) 式と(24) 式より

$$\gamma = \frac{|P(G+1)|}{1 - |f(G + \frac{1}{c}) - 1|}$$
(25)

の関係が成立し, cが大きくなると $|f(G + \frac{1}{c}) - 1|$ の項が1 に近づくことから γ が大きくなり, 性能と安定性にトレードオフが存在することが分かる.

注意 2 上述のトレードオフは Fig. 8 に示す切替制 御系を用いることで解消することができる.本稿では, 内部信号 z の絶対値があるしきい値より小さければ高 性能な制御器 Q_1 に,しきい値より大きくなったときは ロバストな制御器 Q_2 に切替えるような制御系とする ことで,安定性と性能の両立を測る.

4 制御系設計

4.1 制御対象とノミナル制御器

本稿では制御対象として Fig. 9 に示す磁気浮上シス テムを用いる.制御対象のモデルは以下のような伝達



Fig. 9: 磁気浮上システム

Table 1: システムのパラメータ

变数名	数値
鉄球の質量 <i>M</i> [kg]	0.286
定常変位 X[m]	3.00×10^{-3}
補正項 x ₀ [m]	5.014×10^{-3}
電磁石吸引力係数 $k[Nm^2 / A^2]$	2.35×10^{-4}
電磁石のインダクタンス <i>L</i> [H]	0.319
電磁石の抵抗値 $R \; [\Omega]$	9.7716

関数で与えられる.

$$P(s) = -\frac{k_i}{(Ms^2 - k_x)(Ls + R)}$$
(26)

$$= -\frac{69.9}{(s+49.2)(s+30.6)(s-49.2)}$$
(27)

$$k_x = \frac{2kI^2}{(X+x_0)^3}, \quad k_i = \frac{2kI}{(X+x_0)^2}$$
 (28)

システムパラメータを Table 1 に示す. (26) 式より制 御対象が不安定であることが分かる. そこで制御対象 を安定化し,所望の制御性能を得られるようなノミナル 制御器 $K_0 \approx \mathcal{H}_\infty$ 制御の混合感度問題により設計した. ノミナル制御器の伝達関数は以下のように表される.

$$K_{0} = \frac{(s+49.2)(s+30.6)(s+33.1)}{(s+570.4+j717.2)(s+570.4-j717.2)}$$
(29)
 $\times \frac{1}{(s+1549.3)(s+0.01)}$

ノミナル制御器のボード線図を Fig. 10 に示す.

4.2 左既約分解

対象のモデルとノミナル制御器は可観測であること から極配置によって左既約分解を行う.ここではモデ ルとノミナル制御器の既約分解の極を以下のように指 定する.

$$\lambda(A_p + L_p C_p) = \{-200, -190, -180\}$$
(30)
$$\lambda(A_k + L_k C_k) = \{-2000, -710, -700, -100\}$$
(31)

4.3 AW 制御器設計

AW 制御器は,安定化制御器のパラメータ表現 Q を 用いて以下のように表される.

$$K_{AW}(s) = (V - QN)^{-1}(U + QM)$$
(32)

$$det(V - QN)(\infty) \neq 0 \tag{33}$$

本稿では、このパラメータ Q を定理 1 の (17) 式に基 づき、Simplex 法と Simple GA を用いた最適化計算に より次数を 3 次/4 次に固定して求める. このときの設 計パラメータ F, K 及び性能指標 γ , セクタの大きさ cを Table 2 に示す. ここでは、設計パラメータ K を変 えることで、c が異なる 2 つのパラメータ Q_1, Q_2 を求 めている. Table 2 より、 Q_1 は $\gamma \ge c$ が小さく性能は 良いが安定性が悪いことが分かる. 一方、 Q_2 は $\gamma \ge c$ が Q_1 より大きく性能は悪いが安定性がよいことが分 かる. 最適化計算により得られたパラメータ Q_1, Q_2 の 伝達関数表現は以下のようになる.

$$Q_{1} = \frac{(s+0.4)(s+0.2)(s+2.2\times10^{-4})}{(s+39)(s+5.6)(s+6.6\times10^{-2})(s+2.4\times10^{-4})}$$
$$Q_{2} = \frac{(s+6.7\times10^{-2})(s+0.2-j0.6)(s+0.2+j0.6)}{(s+2.6\times10^{-3})(s+2.5+j4.8)(s+2.5-j4.8)} \times \frac{1}{(s+6.9\times10^{-2})}$$

 Q_1, Q_2 を用いた場合の K_{AW} のボード線図を Fig. 10 に示す. これよりノミナル制御器のボード線図と比較 すると AW 制御器の低周波ゲインが低くなっているこ とが分かる. これより入力飽和時の積分作用が抑制さ れるため,制御入力が小さくなりノミナル状態への回 復が早くなることが期待される. また Q_1 と比較すると Q_2 は低~中周波帯域でかなりゲインが低く,追従性能 の劣化が予想される.



Table 2: 計算結果 QF K γ c0.22 Q_1 2.6×10^{-10} 0.028 0.90.390.74 0.028 0.99 Q_2

5 実験結果

以上に示した AW 制御系の検証のための実験を行う. 本稿では、まず定理の検証を行うため、導出した 2 つの AW 制御器のそれぞれの性能を比較する.次に、2 つの AW 制御器を内部信号により切替える実験を行い、本手 法の有効性を示す.

5.1 *L*₂ 性能検証実験

まず磁気浮上システムを用いて,鉄球が定常変位よ り1mm下方で浮上するようにステップ目標値を与え

たときの応答により結果を比較する. また入力飽和は コンピュータ上で仮想的に与えており、その上下限は ±5.5V とする. 実験結果を Fig. 11-14 に示す. ただし, Fig. 11, 13 が出力, Fig. 12, 14 が制御入力である. Fig. 11,13より、どちらの場合もAW制御を施していない 場合に比べオーバーシュートが小さく抑えられており、 不安定系に対しても AW 制御の効果があることが分か る. しかし, γ の値が大きい Q_2 を用いた方は γ の値が 小さい Q_1 を用いた方よりオーバーシュートが大きく 目標値への収束が遅いことから性能が劣っていると言 える.次に,目標値を1.1[mm]とした場合の実験結果 を Fig. 15-18 に示す. これより, c の値が小さい Q₁ を 用いた方は不安定化しているのに対し, c の値が大きい Q2 を用いた方は安定に浮上していることが分かる.以 上により,安定性と性能にトレードオフが存在すること が確認できた.

5.2 切替制御実験

Fig. 8 に示した切替制御系により実験した結果を Fig. 19-20 に示す.ただし、目標値を 1.1[mm],入力飽 和を ± 5.5 V としている.またしきい値は Fig. 20 に示 すように $|z| = 1 \times 10^{-4}$ としている.Fig. 15,17 に示 したように、 Q_1 をのみ用いた場合は不安定化し、 Q_2 の みを用いた場合は目標値に収束するのに時間を要した. しかし Fig. 19 に示すように、切替を行うことで安定性 を保持するのと同時に良好な追従性能を示し、安定性と 性能を両立していることが分かる.

6 おわりに

本稿では, GIMC 構造に基づく AW 制御系設計につ いて紹介した.まず GIMC 構造の等価変換をもとに L₂ 性能指標を導出した. このとき、領域的安定性を考慮 することで不安定な制御対象にも適用できるように拡 張し,安定性と性能のトレードオフが存在することを 述べた. これをもとに最適化計算を用いて高性能な Q₁ とロバストな Q_2 を求め、磁気浮上システムを用いた実 験により理論の確認を行った.これより不安定系に対 しても AW の効果があることが確認された. またこの トレードオフを解消するために制御器の切替を行うこ とを提案し,実験により有効性を示した.この切替手法 は、実験で示したように目標値が変わる場合や飽和の 大きさが変わる場合など、従来の単一の制御器では対 応できない状況において有効である. またゲインスケ ジューリングなどを用いた手法に比べ、簡単でかつ計算 量が少ないことが利点である.

参考文献

- A. Zheng, M. V. Kothare and M. Morari, "Anti-Windup design for internal model control," *Int. Journal of Control*, **60**-5, pp. 1015-1024, 1994.
- M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari and C. N. Nett, "A unified framework for the study of antiwindup designs," *Automatica*, **30**-12, pp. 1869-1883, 1994.
- R. Hanus, M. Kinnaert and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method," *Automatica*, 23-6, pp. 729-739, 1994.

- A. R. Teel and N. Kapoor, "The L₂ anti-windup problem:It's definition and solution," Proc. in European Control Conference, 1997.
- 5) S. Crawshaw and G. Vinnicombe, "Anti-windup synthesis for guaranteed \mathcal{L}_2 performance," *Proc. in IEEE Conference on Decision Control*, 2000.
- 7) 富田, 鷹羽, "Youla パラメトリゼーションに基づくモデ ル追従型アンチワインドアップ制御系の直接設計,"シス テム制御情報学会論文誌, 13-9, pp. 395-402, 2000.
- 8) 鈴木, 堀, "左既約分解に基づいたアンチワインドアップ 制御系の一般構造," 計測自動制御学会論文集, 38-10, pp. 868-875 2002.
- 9) 和田, 佐伯, "可変ゲインアルゴリズムに基づく非線形 Anti-Windup 制御,"日本機械学会論文集 (C 編), 73-733, pp. 2441-2448, 2007.
- 10) Kemin Zhou, "A Natural Approach to High Performance Robust Control: Another Look at Youla Parameterization," *Proc. in SICE Annual Conference*, pp. 869-874, 2004.
- 11) 中曽, 滑川, "GIMC 構造による故障検出とその磁気浮上 システムへの応用,"システム制御情報学会論文集, 21-9, 2008.
- 12) 井村, システム制御のための安定論, コロナ社, pp. 141-142, 2000.



