

# 周期的外乱を考慮した磁気軸受の $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御系設計に関する一考察

## An $\mathcal{H}_\infty$ DIA Control for the Magnetic Bearing Considering Periodic Disturbance

瀬戸 洋紀 (長岡技術科学大学)

滑川 徹 (長岡技術科学大学)

Hiroki SETO

Nagaoka University of Technology

Toru NAMERIKAWA

Nagaoka University of Technology

This paper deals with an  $\mathcal{H}_\infty$  DIA control for the magnetic bearing considering periodic disturbance.  $\mathcal{H}_\infty$  control problem which treats a mixed Disturbance and an Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control is expected to provide a good transient property, and we confirmed that DIA control has a good rotational performance by some experiments. In this paper, we proposed a control system design of  $\mathcal{H}_\infty$  DIA control in order to consider the periodic disturbance for the magnetic bearing. In fact, we get a controller taken a peak at specified frequency by adding a frequency weighting function in generalized plant. Experimental results show that the proposed robust control approach is effective for improving rotational performance.

*Keywords:*  $\mathcal{H}_\infty$  DIA control, Magnetic Bearing, Periodic Disturbance, Rotational Performance

### 1 はじめに

$\mathcal{H}_\infty$  制御は、効果的なロバスト制御系設計手法として知られており、様々な産業製品に応用されている。一方で、最近の機械工作や精密加工分野では制御システムのロバスト安定性だけでなく良好な目標値追従特性も求められている。しかし、従来からの  $\mathcal{H}_\infty$  制御の枠組みでは過渡応答特性を確保することが難しい。

この問題に対して、我々が提案した外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $\mathcal{H}_\infty$  制御は、従来の  $\mathcal{H}_\infty$  制御と比較して良好な過渡応答特性を持つことが期待される [1]。近年、積極的な研究がなされているハイブリッド制御や切替え制御分野での有効な実装法と考えられる。そこで、我々は、磁気軸受に  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御を適用し、良好な過渡応答特性を有することを確認した [2]。しかし、この研究では、磁気軸受のロータは回転せず静止状態を扱っていた。本論文では、ロータ回転時に不釣合いによって起こる周期的外乱を考慮することによって磁気軸受の回転性能の改善を行う。また、磁気軸受の不釣合い振動に関する研究としては、野波らの複数の周波数の

周期性外乱を考慮した適応型不釣合い振動制御などがある [3]。文献 [3] では、安定浮上用アナログ PID 制御と周期性外乱除去の制御で 2 つのコントローラが必要となる。そのために、制御系が複雑となる上、安定浮上にアナログ PID 制御を用いているため制御性能やロバスト安定性が不十分になると考えられる。

そこで本論文では、周期的外乱を考慮した磁気軸受の  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御系設計手法を提案する。具体的には、一般化プラントに周波数重み関数を導入することによって特定の周波数にピークゲインを持つようなコントローラを設計する。まず、ロータの動特性や電磁力の非線形性を考慮した磁気軸受の数学モデルを導出する。次に、不確かさ、制御性能や周期的外乱に対する設計パラメータを含む一般化プラントを構築し、コントローラを設計する。最後に、提案した制御系設計手法が回転性能改善に有効であることを実験的に検証する。

### 2 $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御

時間区間  $[0, \infty)$  で定義される以下の線形時不変システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in R^n$  は状態で  $x_0 = x(0)$  は初期状態;  $u \in R^r$  は制御入力;  $y \in R^m$  は観測出力;  $z \in R^q$  は被制御量;  $w \in R^p$  は外乱であり,  $w(t)$  は区間  $[0, \infty)$  において 2 乗可積分な関数 ( $w \in L^2[0, \infty)$ ) とする. またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく.  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$  は適当な次元を有する定数行列であり, 以下の条件を満たすものとする.

- $(A, B_1)$ : 可安定       $(A, C_1)$ : 可検出
- $(A, B_2)$ : 可制御       $(A, C_2)$ : 可観測
- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$ : 正則
- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$ : 正則

システム (1) に対して, すべての許容制御則  $u(t)$  が以下の線形時不変システムで与えられ, (1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_k \zeta + B_k y, \quad \zeta(0) = 0 \\ u &= C_k \zeta + D_k y \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\zeta(t)$  はコントローラの状態であり, 有限の次元を持つ. また  $A_k, B_k, C_k, D_k$  は適切な次元を持つ定数行列である.

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して, 以下の  $H_\infty$  DIA 制御問題を考える.

### 問題 1 $H_\infty$ DIA 制御問題 [1]

$N > 0$  が与えられたときに, すべての  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ.

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $H_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ.

## 3 システム構成と数学モデル

制御対象である 4 軸制御型磁気軸受の構成図を Fig.1 に示す. 固定子座標系として  $l_1 - l_3, r_1 - r_3$  軸と, 回転子座標系として  $XYZ$  軸を図の様に定義する. ロータの両端の水平, 鉛直方向にそれぞれ電磁石とホール素子型ギャップセンサが設置されている.

いくつかの理想的な仮定 [4] の下で回転周波数に同期したロータの不釣合いによる周期的外乱を考慮した数

学モデルを導出し, 鉛直, 水平方向に分けてまとめると磁気軸受の状態方程式は以下の様になる [2] [5].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_v & pA_{vh} \\ -pA_{vh} & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_v & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v \\ v_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_v \\ E_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{uv} \\ v_{uh} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_v \\ y_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_v \\ w_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_v &= [g_{l1} \ g_{r1} \ \dot{g}_{l1} \ \dot{g}_{r1} \ i_{l1} \ i_{r1}]^T \\ x_h &= [g_{l3} \ g_{r3} \ \dot{g}_{l3} \ \dot{g}_{r3} \ i_{l3} \ i_{r3}]^T \\ u_v &= [e_{l1} \ e_{r1}]^T, \quad u_h = [e_{l3} \ e_{r3}]^T \\ v_v &= [v_{ml1} \ v_{mr1} \ v_{Ll1} \ v_{Lr1}]^T \\ v_h &= [v_{ml3} \ v_{mr3} \ v_{Ll3} \ v_{Lr3}]^T \\ v_{uv} &:= \begin{bmatrix} \varepsilon \sin(pt + \kappa) \\ \tau \cos(pt + \lambda) \end{bmatrix}, \quad v_{uh} := \begin{bmatrix} \varepsilon \cos(pt + \kappa) \\ \tau \sin(pt + \lambda) \end{bmatrix} \\ y_v &= [y_{l1} \ y_{r1}]^T, \quad y_h = [y_{l3} \ y_{r3}]^T \\ w_v &= [w_{l1} \ w_{r1}]^T, \quad w_h = [w_{l3} \ w_{r3}]^T \end{aligned}$$

$I_2 \in R^{2 \times 2}$  は単位行列であり, 添え字  $v$  と  $h$  は磁気軸受の鉛直方向と水平方向の運動を表す. さらに, 添え字  $vh$  は, 鉛直方向と水平方向の運動の干渉項を表し,  $p$  はロータの回転速度を意味する.  $\varepsilon, \tau, \kappa, \lambda$  は不釣合いのパラメータである.

(4) 式をまとめて, 以下の状態方程式を定義する.

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 + E_g v_u \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで  $x_g := [x_v^T \ x_h^T]^T$ ,  $u_g := [u_v^T \ u_h^T]^T$ ,  $v_0 := [v_v^T \ v_h^T]^T$ ,  $v_u := [v_{uv}^T \ v_{uh}^T]^T$ ,  $w_0 = [w_v^T \ w_h^T]^T$  とし,  $A_g, B_g, C_g, D_g, E_g$  は, 適当な次元を持つ定数行列である.

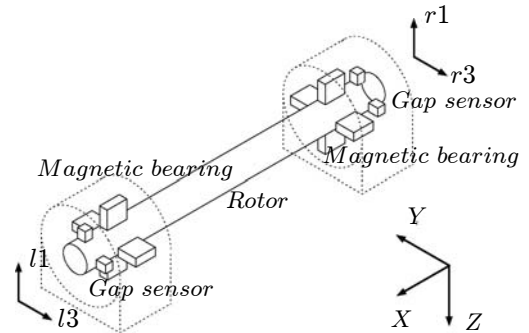


Fig. 1 Magnetic Bearing

## 4 制御系設計

ここでは、得られた状態方程式を基に一般化プラントを構築し、 $\mathcal{H}_\infty$  DIA コントローラを設計する。

### 4.1 一般化プラントの構成と問題設定

外乱  $w_0$  と  $v_0$  について考える。外乱  $w_0$  は理想化や簡略化に起因するモデルの不確かさを表す。従って、主に中間周波数帯から高周波帯にかけて外乱  $w_0$  は大きく影響してくると考えられる。外乱  $v_0$  は、パラメータ誤差や無視された非線形性による不確かさを表しており主に低周波数帯域でシステムに影響を与える。以下に、外乱  $w_0$  と  $v_0$  を定義する。

$$w_0(s) = W_w(s)w_1(s), v_0(s) = W_{v1}(s)w_2(s) \quad (6)$$

$$W_w(s) = I_4 W_{w0}(s), W_{v1}(s) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} W_{v0}(s)$$

$$W_{w0}(s) = C_{w0}(sI_4 - A_{w0})^{-1}B_{w0} \\ W_{v0}(s) = C_{v0}(sI_4 - A_{v0})^{-1}B_{v0} \quad (7)$$

ここで  $W_w(s)$ ,  $W_{v1}(s)$  は周波数重み関数である。なお、 $I_4$  は 4 次の単位行列である。

最後に、周期的外乱  $v_u$  について考える。外乱  $v_u$  は、ロータ質量の不釣り合いによる不確かさの影響を表している。この外乱  $v_u$  のために、磁気軸受のロータは、ロータの回転周波数に同期した振動を引き起こす。

$$v_u = W_{v2}(s)w_3 \quad (8) \\ W_{v2}(s) = I_4 W_{vu}(s) \\ W_{vu}(s) = C_{vu}(sI_4 - A_{vu})^{-1}B_{vu}$$

ここで、 $W_{v2}(s)$  は指定された周波数にゲインのピークを持つ周波数重み関数である。

次に被制御変数について考慮する。制御の基本仕様が浮上体の非接触支持であるため、被制御量として定常ギャップからの微小変位  $g_j(t)$  とその速度で重み付けし、被制御量  $z_1$  を以下のように定義する。同様に制御入力のレギュレーションのために  $u_g$  に  $\rho$  で重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する。同様に制御入力のレギュレーションのために  $u_g$  に  $\rho$  で重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する。

$$z_g = F_g x_g, \quad F_g = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$z_1 = \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_{v1} \quad \theta_{v2} \quad \theta_{h1} \quad \theta_{h2}] \quad (10)$$

$$z_2 = \rho u_g \quad (11)$$

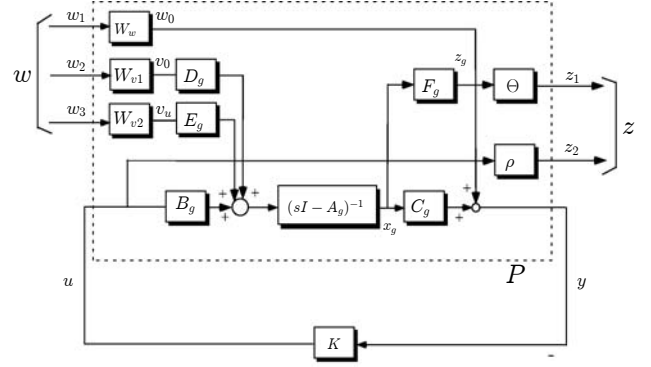


Fig. 2 Generalized Plant

最終的には制御対象と重み行列をまとめ、一般化プラントを (12) のように構成する。このブロック線図は Fig.2 で表される。なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい。

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} u \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_g & D_g C_{v1} & E_g C_{v2} & 0 \\ 0 & A_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{v2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_w \end{bmatrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_{v1} & E_g D_{v2} \\ 0 & B_{v1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{v2} \\ B_w & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 = \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [C_g \quad 0 \quad 0 \quad C_w] \\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, D_{21} = [D_w \quad 0 \quad 0]$$

ここで  $x := [x_g^T \quad x_{v1}^T \quad x_{v2}^T \quad x_w^T]^T$  とおく。  $w, z, y, u$  を、  $w := [w_1^T \quad w_2^T \quad w_3^T]^T, z := [z_1^T \quad z_2^T]^T, y := y_g, u := u_g$  とおく。  $x_w, x_{v1}, x_{v2}$  は、それぞれ重み関数  $W_w, W_{v1}, W_{v2}$  の状態を表す。

本制御系設計での制御問題は以下で与えられる。

**制御問題：**一般化プラント (12) に対して DIA 条件 (3) を達成する許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ。

### 4.2 $\mathcal{H}_\infty$ DIA コントローラ

上記の制御問題に対する解を得るため、MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって以下の設計パラメータを選定した。

$$W_{v0}(s) = \frac{40000}{s + 0.1} \\ W_{vu}(s) = \frac{1000(s + 7.85 \times 10^1 \pm 1.36 \times 10^2 i)}{(s + 5.0 \times 10^{-1} \pm 1.57 \times 10^2 i)}$$

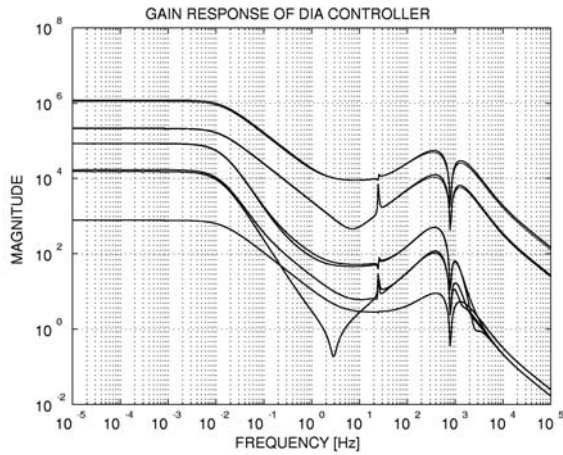


Fig. 3 Frequency Response of  $\mathcal{H}_\infty$  DIA Controllers

$$W_{w0}(s) = \frac{1.5(s + 1.07 \times 10^4)(s + 2.51 \times 10^3 \pm 4.35 \times 10^3 i)}{(s + 5.34 \times 10^4)(s + 5.0 \times 10^{-1} \pm 5.03 \times 10^3 i)}$$

$$\Theta = \text{diag} [\theta_{v1} \quad \theta_{v2} \quad \theta_{h1} \quad \theta_{h2}]$$

$$\theta_{v1} = \text{diag} [0.4 \quad 0.4], \theta_{h1} = \text{diag} [0.5 \quad 0.5]$$

$$\theta_{v2} = \theta_{h2} = \text{diag} [0.0005 \quad 0.0005]$$

$$\rho = 8.0 \times 10^{-7} I_4$$

$W_{w0}(s)$  は低周波帯域の周波数に重み付けするために一次の伝達関数とした。  $W_{vu}(s)$  は、ロータの不釣り合いによる振動を局所的に減衰させるために 25[Hz] でピークを持つ伝達関数である。  $W_{w0}(s)$  はロータの一次振動モードを許容するために、共振周波数 800Hz をピークとした 3 次の伝達関数で表す。

以上で、 $\mathcal{H}_\infty$  DIA コントローラ  $K(s)$  が直接的に得られる。ここでコントローラ  $K(s)$  は 4 入力 4 出力で、次数は 36 次である。  $K(s)$  の周波数応答を Fig.3 に示す。

## 5 制御実験による検証

ここでは前節で得られた  $\mathcal{H}_\infty$  DIA コントローラの回転性能を制御実験により検証する。

回転制御実験としては、6000[rpm] 程度まで回転数を上げてから無負荷状態にして回転数が完全に止まるまでの応答を確認した。本実験では、3000[rpm] 以下からデータを取得している。実験結果を Fig.4 に示す。

Fig.4 で、横軸は 3000[rpm] から 0[rpm] までの回転周波数と回転速度、縦軸は磁気軸受左端の鉛直方向の変位を示す。実験結果より重み関数  $W_{vu}(s)$  で設定した周波数 25[Hz](1500[rpm]) 付近で、ロータの振動振幅が減衰していることがわかる。よって、本論文で提案した制御系設計手法により得られた  $\mathcal{H}_\infty$  DIA コントローラにより、局所的に回転性能を改善させることができた。

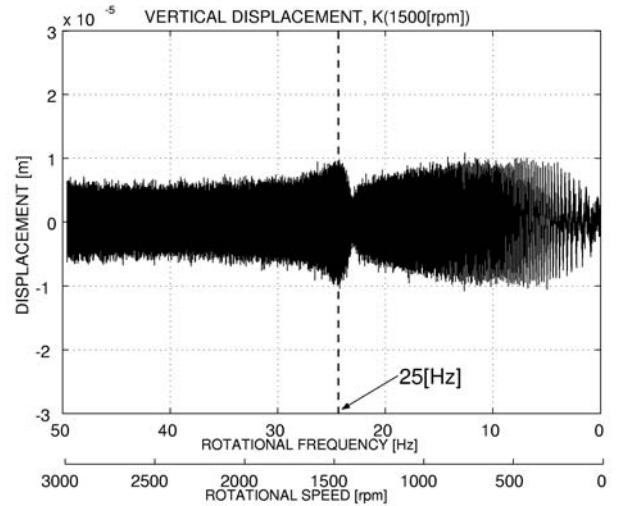


Fig. 4 An Experimental Result

## 6 おわりに

本稿では、周期的外乱を考慮した磁気軸受の  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御系設計の有効性を検証した。まず、ロータの不釣り合いによる周期的外乱を考慮した数学モデルを導出し、一般化プラントを構築した。そこで、一般化プラントに周期的外乱を考慮するための新たな重み関数を設定した。最後に、回転数変化を伴う制御実験により、提案した  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御系設計手法が回転性能の改善に有効であることを示した。

## 参考文献

- [1] T. Namerikawa and M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, "On the  $\mathcal{H}_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties," *Trans. of the SICE*, vol.40, no.3, pp.307-314, 2004.
- [2] W. Shinozuka and T. Namerikawa, "Improving the Transient Response of Magnetic Bearings by the  $\mathcal{H}_\infty$  DIA Control," *Proc. of CCA*, pp.1130-1135, 2004.
- [3] Zi-he Liu, K. Nonami and Y. Ariga, "Adaptive Unbalanced Vibration Control of Magnetic Bearing Systems with Rotational Synchronizing and Asynchronizing Harmonic Disturbance," *JSME International Journal - Series C*, vol. 45, no. 1, pp. 142-149, 2002.
- [4] F. Matsumura, T. Namerikawa, K. Hagiwara and M. Fujita, "Application of Gain Scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  Robust Controllers to a Magnetic Bearing," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 5, 1996.
- [5] F. Matsumura, M. Fujita, K. Okawa, "Modeling and Control of Magnetic Bearing Systems Achieving a Rotation Around the Axis of Inertia," *2nd Int. Symposium on Magnetic Bearing*, Japan, July, 1990.