コントローラの初期状態の不確かさを考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御

長岡技術科学大学　○滑川 徹　丸山 和伸

$\mathcal{H}_\infty$ Control Considering Initial State Uncertainties of Controllers

○ Toru NAMERIKAWA and Kazunobu MARUYAMA　Nagaoka University of Technology

Abstract: This paper deals with $\mathcal{H}_\infty$ control attenuating initial-state uncertainties of controllers. An $\mathcal{H}_\infty$ control problem, which treats a mixed attenuation of disturbance and initial-state uncertainty of controllers for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed attenuation supplies $\mathcal{H}_\infty$ controls with good transients and assures $\mathcal{H}_\infty$ controls of robustness against initial-state uncertainty of controllers. We derive a necessary and sufficient condition of the mixed attenuation problem. Futhermore we apply this proposed method to a magnetic suspension system, and evaluate attenuation property of the proposed $\mathcal{H}_\infty$ control approach.

Key Words: $\mathcal{H}_\infty$ Control, Robust Control, Initial-State Uncertainties of Controllers, DIA

1　はじめに

従来の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態はゼロと仮定して理論展開されてきた．これに対して，外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題は従来の外乱減衰特性のみを考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御に比べて良好な過渡特性を付加する．

外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題については，まず有限時間の場合の一般化 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対する解が得られ [1)2)]，さらにこの問題は無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された [2)3)]．文献 [3)] で議論されているのは直交条件を含む制御対象に限定されていた [4)5)6)] が，文献 [7)] では従来の結果から直交条件をはずして，外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を定式化し，可解条件の必要十分条件が導出された．文献 [8)] では [7)] のアプローチを用いて磁気浮上システムに対して制御系設計を行い，提案手法の特性を実験的に検証し，過渡応答特性の改善に有用であることが確認されている．

従来の手法は，制御対象の初期状態が考慮されいているが，切替制御への応用を考えた場合，制御器の切替の際に制御器の初期状態の不確かさがシステムへ悪影響を及ぼすことが考えられる．そこで，本稿では [7)] の結果を応用し，外乱と制御器の初期状態の不確かさの影響の混合減衰 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を定式化し，可解条件の必要十分条件を導出する．また，得られた結果を磁気浮上システムへ応用し，シミュレーションにより提案手法の検証を行う．

2　準備

$t \in [0, \infty)$ で定義される以下の線形時不変システムを考える．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0 \\ z & = & C_1 x + D_{12} u \\ y & = & C_2 x + D_{21} w \end{array} \right. \tag{1}$$

ここで，$x \in R^n$ は状態で $x(0) = x_0$ は初期状態;$u \in R^r$ は制御入力;$y \in R^m$ は観測出力;$z \in R^q$ は被制御量;$w \in R^p$ は外乱であり，$w(t)$ は区間 $[0, \infty)$ において 2 乗可積分な関数 ($w \in L^2[0, \infty)$) とする．

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ は適当な次元を有する定数行列であり，以下の条件を満たすとする．

- (A, B_1): 可安定，　(C_1, A): 可検出
- (A, B_2): 可制御，　(C_2, A): 可観測
- $D_{12}^T D_{12} = I, \quad D_{21} D_{21}^T = I$
- $D_{12}^T C_1 = 0, \quad B_1 D_{21}^T = 0$

システム (1) に対して，すべての許容制御則 $u(t)$ が以下の線形時不変システムで与えられ，(1),(2) により構成される閉ループ系が内部安定となるものとする．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & J\underline{x} + Ky \\ \dot{\underline{x}} & = & G\underline{x} + Hy, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

ここで，$\underline{x}$ は制御器の状態で $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ は制御器の初期状態を表す．また，J, K, G, H は適当な次元を持つ定数行列である．

3　制御対象の初期状態を考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御

従来の研究結果である制御対象の初期状態の不確かさを考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御 ($\mathcal{H}_\infty$DIA 制御)[7)] を示す．対象とするシステムおよびコントローラは前節の (1) 式および (2) 式である．ただし，それぞれの初期状態を $x(0) = x_0, \underline{x}(0) = 0$ とし，制御対象の初期状態のみを考慮する．

$\mathcal{H}_\infty$DIA 制御問題は次のように定義される．

問題 1 $\mathcal{H}_\infty$DIA 制御問題

すべての $w \in L^2[0, \infty)$ とすべての $x_0 \in R^n$ (ただし $(w, x_0) \neq 0$) に対して，z が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ．

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N_1^{-1} x_0 \tag{3}$$

N_1 は制御対象の初期状態に対する重み行列である．

この問題に対して以下の仮定を設ける．

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で，解 $M > 0$ が存在する．

$$MA + A^T M - M(B_2 B_2^T - B_1 B_1^T)M + C_1^T C_1 = 0 \tag{4}$$

ここで，つぎの行列は漸近安定である．

$$A - B_2 B_2^T M + B_1 B_1^T M \tag{5}$$

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で，解 $P > 0$ が存在する．

$$AP + PA^T - P(C_2^T C_2 - C_1^T C_1)P + B_1 B_1^T = 0 \quad (6)$$

ここで，つぎの行列は漸近安定である．

$$A - PC_2^T C_2 + PC_1^T C_1 \quad (7)$$

(A3) 次のように定義される行列 S が正定となる．

$$S := (M^{-1} - P)^{-1} > 0 \quad (8)$$

注意 1 ここで，条件 (A3) は，$\rho(PM) < 1$ であることと等価である．ただし，$\rho(X)$ は X のスペクトル半径を表し，$\rho(X) = \max|\lambda_i(X)|$ である．

定理 1 システム (1) に対して仮定 (A1),(A2),(A3) が成り立つとする．このとき，$\mathcal{H}_\infty$ セントラルコントローラが (3) を満たすための必要十分条件は以下の条件 (A4) を満たすことである．

ただし，セントラルコントローラは以下で与えられる．

$$\begin{cases} u = -B_2^T S \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B_2 u + PC_2^T(y - C_2\underline{x}) + PC_1^T C_1 \underline{x} \end{cases} \quad (9)$$

(A4) $Q + N_1^{-1} - P^{-1} > 0$
ここで，Q は以下の Riccati 方程式の最大解である．

$$\begin{aligned} &Q(A + B_1 B_1^T P^{-1}) + (A + B_1 B_1^T P^{-1})^T Q \\ &-Q(B_1^T - D_{21}^T C_2 PL)^T (B_1^T - D_{21}^T C_2 PL)Q = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで，$L := (I - PM)^{-1}$．

4 制御器の初期状態を考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御

本稿の主要な結果である制御器の初期状態を考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御を示す．対象とするシステムおよびコントローラは (1)，(2) で与えられるものとする．ただし，それぞれの初期状態を $x(0) = 0, \underline{x}(0) = \underline{x}_0$ とし，制御器の初期状態のみを考慮する．

制御器の初期状態の不確かさを考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題は以下で与えられる．

問題 2
制御器の初期状態の不確かさを考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題
$N_2 > 0$ が与えられたときに，すべての $w \in L^2[0, \infty)$ とすべての $\underline{x}_0 \in R^n$ に対して z が以下を満たすような外乱と制御器の初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ．

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T N_2^{-1} \underline{x}_0 \quad (11)$$

上記の問題において，制御器の初期状態 $\underline{x}_0$ に対する重み行列 N_2 は制御器の初期状態の不確かさの外乱減衰に対する相対的な重要性を表す．行列不等式の意味でより大きな N_2 を選ぶことは，制御器の初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する．

この問題に対して，前節で示した Riccati 条件 (A1),(A2),(A3) の仮定のもとで以下の結果が得られる．

補題 1 システム (1) に対して，仮定 (A1),(A2),(A3) が成り立つものとする．このとき $\mathcal{H}_\infty$ セントラルコントローラはすべての外乱 $w \in L^2[0, \infty)$ とすべての制御器の初期状態 $\underline{x}_0 \in R^n$ に対して，以下の条件を満たす．

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T (S + P^{-1}) \underline{x}_0 \quad (12)$$

証明
以下に示す汎関数 V_1 を定義する．

$$V_1(t) := \underline{x}^T S \underline{x} + (x - \underline{x})^T P^{-1} (x - \underline{x}) \quad (13)$$

(13) の両辺を t について微分し，仮定 (A1),(A2),(A3) を代入すると以下が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= -\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|u + B_2^T S \underline{x}\|^2 \\ &\quad -\|w - w_0\|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

ただし，$w_0 := D_{21}^T C_2 PS\underline{x} + (B_1^T - D_{21}^T C_2 P)P^{-1}(x - \underline{x})$ である．両辺を区間 $[0, \infty)$ で積分すると左辺は以下となる．

$$\int_0^\infty \dot{V}_1(t)dt = -\underline{x}_0^T (S + P^{-1}) \underline{x}_0 \quad (15)$$

さらに，(14) の右辺に制御入力 (9) を適用することで以下が得られる．

$$-\underline{x}_0^T (S + P^{-1}) \underline{x}_0 = -\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2 - \|w - w_0\|_2^2 \quad (16)$$

ここで，$\|w - w_0\|_2^2 > 0$ より，以下が成り立つ．

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T (S + P^{-1}) \underline{x}_0$$

(補題 1 証明終わり)

明らかに補題 1 は P, S に関する条件であり，N_2 の条件ではない．そこで，以下の不等式を導入する．

(A5) $S + P^{-1} < N_2^{-1}$

(A5) が満たされるとき，不等式 (11) により，

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &< \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T (S + P^{-1}) \underline{x}_0 \\ &< \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T N_2^{-1} \underline{x}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

より，問題 2 の条件 (11) を満たす．よって (A5) は (9) で表される制御則が問題 2 を満たす十分条件である．

つぎに，(9) で表される制御則が問題 2 を満たすための必要十分条件を得るために以下の条件を考える．

(A6) $L^T QL + N_2^{-1} - P^{-1} - S > 0$
ここで，Q は (10) 式の Riccati 方程式の最大解である．

定理 2 システム (1) に対して (A1),(A2),(A3) が成り立つとする．このとき，$\mathcal{H}_\infty$ セントラルコントローラ (9) が (11) を満たすための必要十分条件は (A6) で与えられる．

証明

まず，補題 2，補題 3 を与える．補題 2 で新たに条件 (A7) を与え，それが (11) 式を満たすための必要十分条件であることを示す．つづいて補題 3 で (A6) と (A7) が等価であることを示し，定理 2 の証明とする．

(A7) すべての外乱 $w \in L^2[0,\infty)$ とすべてのコントローラの初期状態 $\underline{x}_0 \in R$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\|w - w_0\|_2^2 + \underline{x}_0^T(N_2^{-1} - P^{-1} - S)\underline{x}_0 > 0 \qquad (18)$$

補題 2 システム (1) に対して条件 (A1),(A2),(A3) が成り立つとする．このとき，$\mathcal{H}_\infty$ セントラルコントローラ (9) が条件 (11) を満たすための必要十分条件は (A7) を満たすことである．

証明

汎関数 $V_1 = \underline{x}^T S \underline{x} + (x - \underline{x})^T P^{-1}(x - \underline{x})$ の式展開より得られる以下の恒等式 (16) を考える．

$$\|w - w_0\|_2^2 = \|w\|_2^2 - \|z\|_2^2 + \underline{x}_0^T(S + P^{-1})\underline{x}_0$$

まず，十分性を示す．条件 (A7) に (16) 式を代入すると明らかに,

$$\|w\|_2^2 - \|z\|_2^2 + \underline{x}_0^T N_2^{-1}\underline{x}_0 > 0 \qquad (19)$$

より,

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + \underline{x}_0^T N_2^{-1}\underline{x}_0 \qquad (20)$$

を満たす.

逆に (11) 式を (16) 式へ代入すると直ちに以下を得る．

$$\|w - w_0\|_2^2 + \underline{x}_0^T(N_2^{-1} - P^{-1} - S)\underline{x}_0 > 0 \qquad (21)$$

(補題 2 証明終わり)

補題 3 システム (1) が (A1),(A2),(A3) を満たすと仮定する．このとき (A6) と (A7) は等価である．

証明

汎関数 $V_2(t) := f^T Q f$ を考える．ここで，$f := x(t) - L\underline{x}(t)$ である．$V_2(t)$ を時間微分してまとめると，

$$\dot{V}_2(t) = \|(w-w_0) + (B_1^T - D_{21}^T C_2 P L^T)Qf\|^2 - \|w - w_0\|^2 \qquad (22)$$

両辺を区間 $[0,\infty)$ で積分する．左辺は,

$$\int_0^\infty \dot{V}_2(t)dt = -\underline{x}_0^T L^T Q L \underline{x}_0 \qquad (23)$$

よって,

$$\begin{aligned} -\underline{x}_0^T L^T Q L \underline{x}_0 &= \|w - w_0 + (B_1^T - D_{21}^T C_2 P L^T)Qf\|_2^2 \\ &\quad -\|w - w_0\|_2^2 \end{aligned} \qquad (24)$$

(24) 式を (A7) に代入する．

$$\begin{aligned} &\|w - w_0 + (B_1^T - D_{21}^T C_2 P L^T)Qf\|_2^2 \\ &\quad + \underline{x}_0^T(L^T Q L + N_2^{-1} - P^{-1} - S)\underline{x}_0 > 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

ここで，(25) 式の第一項は正なので,

$$L^T Q L + N_2^{-1} - P^{-1} - S > 0 \qquad (26)$$

が成り立つ.

逆に，(24) 式を (A6) に代入すると,

$$\|w - w_0\|_2^2 + \underline{x}_0^T(N_2^{-1} - P^{-1} - S)\underline{x}_0 > 0 \qquad (27)$$

を得る.

以上より，(A6) と (A7) が等価であることが示された. (補題 3 証明終わり)

5 設計例

得られた設計法と解析法を磁気浮上システムに適用し，提案手法の検証を行なう．このシステムは以下の数学モデルで与えられる [8).]

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \end{aligned} \qquad (28)$$

ここで，$x_g := [x\ \dot{x}\ i]^T$, $u_g := e$, $v_0 := [v_m\ v_L]^T$ であり，$x(t)$:浮上体の変位，$i(t)$:電流，$u_g(t) = e(t)$:制御入力，$v_m(t), v_L(t)$:外乱，ノイズ，$w_0(t)$:センサノイズや不確かさの影響である．(A_g, B_g) および (A_g, D_g) は可制御，(A_g, C_g) は可観測である．

(28) 式の外乱 v_0 は入力外乱で，w_0 は出力外乱およびモデルの不確かさを表す．このため，重み関数 W_v および W_w を導入し，被制御量は z_1 として，状態量 x_g の中からギャップ長 $x(t)$ とその微分値 $\dot{x}(t)$ を選び，これらに対する重み $\Theta = \mathrm{diag}[\theta_1\ \theta_2]$ を導入する．また，z_2 として制御入力 u を選び，スカラ ρ で重み付けする．

以上により，一般化プラントを以下のように構成する．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \\ C_2 &= [C_g \quad 0],\ D_{21} = [W_w \quad 0] \end{aligned}$$

ここで，$x := [x_g^T\ x_w^T]^T$ であり，x_w は $W_v(s)$ の状態，また $z := [z_1^T\ z_2^T]^T$ である．

条件 (11) 式を満足する $\mathcal{H}_\infty$DIA コントローラを得るため，繰り返し計算により，設計パラメータを選定することで (9) 式よりコントローラが直接的に得られる．条件 (A6) を満たす最大の行列 N_2 の計算においては後の検証の簡単化のため，構造を以下のように限定する．

$$N_2 = n_2 I \qquad (30)$$

n_2 は正のスカラで I は 4 次の単位行列とする．制御器の初期状態 $\underline{x}_0$ の不確かさに対する重み行列 N_2 は制御器の初期状態の不確かさの影響の抑制と外乱の抑制の相対的な重要性の指標と考えられる．重み行列 N_2 に対する性能の検証のため，設計パラメータを変更し異

なる n_2 を持つ $\mathcal{H}_\infty$DIA コントローラを設計する．変更するパラメータは浮上体の位置 x に対する重み係数である θ_1 を選び，4 つのコントローラ K_1〜K_4 を設計した．これらの結果を Table 1 に示す．また得られた 4 つのコントローラの周波数応答を Fig.1 に示す．重み係数 θ_1 が大きい程，コントローラの高周波ゲインが大きく，それに伴い n_2 の値が大きい傾向がある．

Table 1: コントローラと n_2 の値

Controller	θ_1	n_2
K_1	1.10	5.256979×10^{-3}
K_2	0.80	5.223573×10^{-3}
K_3	0.50	5.202183×10^{-3}
K_4	0.30	5.193772×10^{-3}

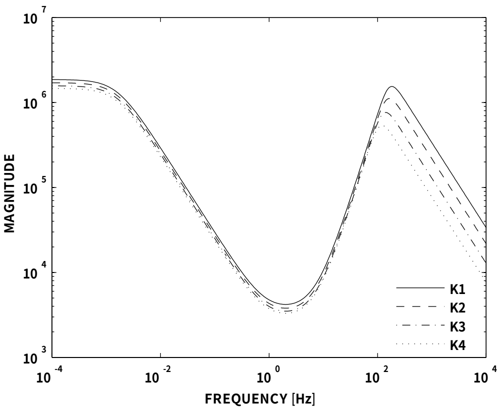

Fig. 1: Frequency Responses of $\mathcal{H}_\infty$DIA Controller

n_2 の異なるコントローラ K_1〜K_4 の特性をシミュレーションにより検証した．まず，n_2 による制御器の初期状態の不確かさの減衰性能を確認するため，初期値応答のシミュレーションを行なった．ここで制御器の初期値は $\underline{x}_0 = [1.0 \times 10^{-5}\ 0\ 0\ 0]^T$ とした．シミュレーション結果を Fig.2 に示す．n_2 が大きいほどオーバーシュートが小さく，整定時間が改善されている．

つぎに過渡応答性能の確認のため，外乱応答による検証を行なった．外乱の大きさは定常吸引力の約 25%である 0.7[N] の外乱を鉛直下向きに加えた．結果を Fig.3 に示す．この場合は整定時間にはそれほど差が見られなかったが，オーバーシュートが小さく抑えられている．これらの結果は制御対象の初期状態を考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御の場合と同じ傾向の結果[8] が得られ，より大きい n_2 を選ぶことで，過渡応答性能が改善されることが確認できた．これにより制御器の初期状態に対する重み行列 N_2 が制御系の過渡応答の評価指標として有効であることが確認できた．

6 おわりに

本論文では外乱とコントローラの初期状態の不確かさの混合減衰 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題について考察した．まず，外乱と制御器の初期状態の不確かさの影響の混合減衰 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を定式化し，可解条件の必要十分条件を導出した．また磁気浮上システムを例として制御系設計を行い，シミュレーションによる検証により，提案法の初期値応答，過渡応答に対する有効性を確認した．

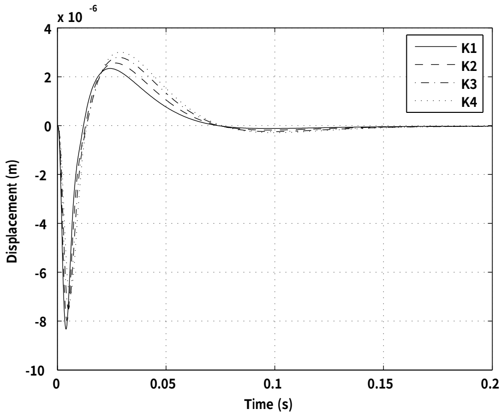

Fig. 2: Initial Responses

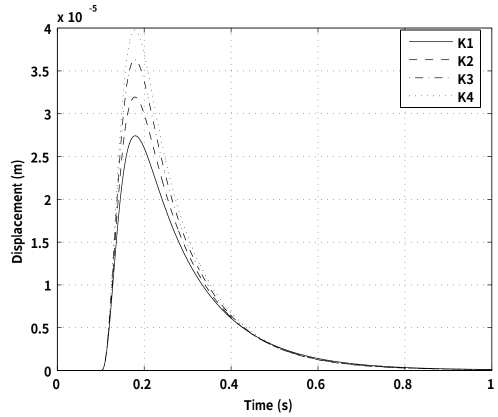

Fig. 3: Disturbance Responses

参考文献

1) K.Uchida and M.Fujita, “Controllers Attenuating Disturbance and Initial-Uncertainties for Time-Varying Systems,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol.156, Springer-Verlag, pp.187-196, 1991.

2) P.P.Khargonekar, K.M.Nagpal and K.R.Poolla, “$\mathcal{H}_\infty$ Controll with Transient,” *SIAM J.Control and Optimization*, vol.29, pp.1373-1393,1991.

3) K.Uchida and A.Kojima and M.Fujita, “$\mathcal{H}_\infty$ control attenuating initial-state uncertainties,” *Int.J.of Control*, vol.66, no.2, pp.245-252,1997.

4) A.Kojima, M.Fujita, K.Uchida and E.Shimemura, “Linear Quadratic Differential Games and $\mathcal{H}_\infty$ Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -,” *Trans.of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol.28, no.5, pp.570-577,1992.

5) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Kharogonekar, and B.A.Francis, “State-Space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.34, no.8, pp.831-847,1989.

6) T.Namerikawa, M.Fujita, and R.S.Smith, “$\mathcal{H}_\infty$ Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties: Evaluation by a Magnetic Suspension System,” *Proc.of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp.87-92, 2001.

7) T.Namerikawa, M.Fujita, R.S.Smith and K.Uchida, “On the $\mathcal{H}_\infty$ Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties”, *Trans.of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol.40,No.3,307/314, 2004.

8) 滑川徹，藤田政之，“初期状態の不確かさを考慮した $\mathcal{H}_\infty$DIA 制御系設計とその磁気浮上システムへの応用，” 第 *3* 回 *SICE* 制御部門大会資料, pp. 659-662,2003