

# GIMC 構造を用いた磁気浮上システムの高性能ロバスト制御

滑川 徹 丸山 英人 (長岡技術科学大学)

## High Performance Robust Control of Magnetic Suspension Systems Using GIMC Structure

\*T. Namerikawa and H. Maruyama (Nagaoka University of Technology)

**Abstract**— This paper deals with a high performance and robust control scheme based on Generalized Internal Model Control(GIMC) Structure proposed by Kemin Zhou. We apply the GIMC structure to the magnetic suspension system and implement a high performance and high robust control system for an unstable mechatronic system. Effectiveness of the GIMC structure is evaluated via some control simulations and experimental results.

**Key Words:** Generalized Internal Model Control(GIMC), High Performance Robust Control, Robustness and Performance, Magnetic Suspension System

### 1 はじめに

フィードバック制御構造において、制御性能とロバスト性の間にトレードオフの関係があることは良く知られている事実である。つまり、高い制御性能を得るためにはロバスト性を犠牲にし、逆に高いロバスト性を達成するには性能を悪くせざるを得ない。

従来の  $H_\infty$  制御や  $\mu$  設計法などのロバスト制御系設計法は到底起こりえない外乱や不確かさの最悪ケースに基づいて設計されるためノミナルモデルに対する性能が十分でない場合が多い<sup>1, 2)</sup>。一方で、もちろん最悪ケースにおいても安定性を保証することは極めて重要なことである。

つまり望ましい特性とはノミナル時において良好な応答を示し、モデル変動時には最悪でも安定性を維持することである。この問題に対して、GIMC 構造は性能とロバスト性のトレードオフ問題を考えることなく、上記の望ましい特性を得ることができる制御構造として提案されている<sup>3) 4)</sup>。これは安定化補償器のパラメトリゼーションを利用したもので、耐故障性を有する制御系設計にも応用が可能である<sup>5)</sup>。

GIMC 構造は高い性能を持つノミナルコントローラ  $K_0$  と高いロバスト性を持つロバストコントローラ  $K$  を使い分け、ノミナル時には  $K_0$  で、モデル変動時には  $K$  で制御し、性能とロバスト性を両立する。

本研究では GIMC 構造を不安定なメカトロニクスシステムである磁気浮上システム<sup>6)</sup> に応用し、その有効性を実験的に検証する。

### 2 GIMC 構造と高性能ロバスト制御

線形時不変の制御対象  $\tilde{G}(s)$  のノミナルモデルを  $G(s)$  とし、 $G(s)$  に対する安定化コントローラ  $K_0$  が存在するとする。ここで  $G(s)$  と  $K_0$  が以下のように左既約分解表現されるとする。

$$G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}, \quad K_0 = \tilde{V}^{-1}\tilde{U} \quad (1)$$

このときに全ての安定化コントローラ  $K(s)$  はフリーパラメータ  $Q \in RH_\infty$  を用いて式 (2) で表されることが知られている。

$$K = (\tilde{V} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{U} + Q\tilde{M}) \quad (2)$$

ただし、フリーパラメータ  $Q \in RH_\infty$  は以下を満たすものとする。

$$\det(\tilde{V} - Q\tilde{N})(\infty) \neq 0 \quad (3)$$

GIMC 構造はこの式 (1), (2) の関係を用いて Fig.1 で表される。ここで制御対象が  $\tilde{G}(s)$  で表現されていることに注意されたい。Fig.1 は通常のフィードバックループ ( $K_0(s) = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ ) に内部フィードバックループが加わった構造を有している。この構造は IMC (Internal Model Control) と類似しており、そのため GIMC 構造と呼ばれる。

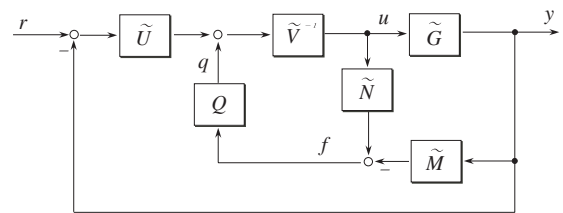


Fig. 1: GIMC Structure

フリーパラメータ  $Q \in RH_\infty$  は本来 (3) 式を満たす範囲で自由に選定できるが、 $Q(s)$  を固定すると  $K(s)$  が一意に決まる。以下では  $Q(s)$  を固定して議論する。

Fig.1 において内部信号  $f$  に着目すると、 $f(s)$  は式 (4) で表されることが容易に分かる。

$$f(s) = \tilde{N}(s)u(s) - \tilde{M}(s)y(s) \quad (4)$$

ここで信号  $f(s)$  は推定出力と観測出力の誤差とみなすことが出来<sup>4)</sup>、 $f = 0$  の場合と  $f \neq 0$  の場合でフィードバック構造が変化する。

$f(s) = 0$ : モデルの不確かさ、外乱、故障が存在しない場合は  $\tilde{G} = G$  となり、信号  $q(s) = Qf = 0$  となる。そのため  $K_0 = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  で制御される。

$f(s) \neq 0$ : モデルの不確かさ、外乱、故障が存在する場合は  $\tilde{G} \neq G$  となり、信号  $q(s)$  が ON となり内部ループが有効となる。その結果  $K = (\tilde{V} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{U} + Q\tilde{M})$  で制御される。

このように、GIMC 構造では内部信号  $f(s)$  を使い制御構造を切り替えることでコントローラ  $K_0(s)$ ,  $K(s)$  の切り替えが可能となる。この切り替え特性により、 $K_0(s)$  を高い制御性能を有するように、 $K(s)$  を高いロバスト性を有するように設計すれば、ノミナル時 ( $f(s) = 0$ ) は高い性能を有したノミナルコントローラ  $K_0(s)$  で、モデル変動時 ( $f(s) \neq 0$ ) には高いロバスト性を有したコントローラ  $K(s)$  で制御されることになり、望ましいコントローラ特性を得ることができる。

これらのことより、GIMC 構造のコントローラの設計は次のように行う。

設計手順<sup>3)</sup>

Step 1. ノミナルモデル  $G(s)$  に対して高い性能を持つノミナルコントローラ  $K_0$  を設計する

Step 2. 変動モデル  $\tilde{G}(s)$  に対して高いロバスト性を持つロバストコントローラ  $K$  を設計する

Step 3. 内部コントローラ  $Q$  を以下の式で求める

$$Q = \tilde{V}(K - K_0)(\tilde{N}K + \tilde{M})^{-1} \quad (5)$$

このように設計することで内部コントローラ  $Q$  はノミナル時には影響を及ぼさず、ノミナルコントローラ  $K_0$  で制御され、モデル変動時にはロバストコントローラ  $K$  で制御されることになる。

しかし実際には制御対象を完全に正確にノミナルモデル  $G(s)$  で表現することは困難であるので、 $\tilde{G} = G$  を維持することは容易ではない。そこで、Fig.2 のような内部信号に検出器とスイッチを加えた構造を考える。これにより  $\tilde{G} \simeq G$  と制御対象を完全に表現できなくても、高性能なコントローラ  $K_0$  を用いて制御できる。具体的には検出器はフィルタと閾値設定などで構成可能である。

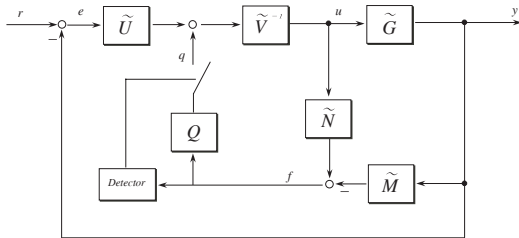


Fig. 2: GIMC Structure with Detector and Switch

### 3 制御対象

本研究で用いる制御対象は Fig.3 で示される一軸制御型磁気浮上システムである<sup>6)</sup>。図中の各変数は  $m$ : 浮上体質量、 $f(t)$ : 電磁石吸引力、 $x(t)$ : 変位、 $i(t)$ : 印加電流を表す。このシステムの運動方程式は式 (6) で表され、電磁石吸引力は式 (7) で表される。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - f(t) \quad (6)$$

$$f(t) = k \left( \frac{i(t)}{x(t) + x_0} \right)^2 \quad (7)$$

式 (7) 中の  $k$ ,  $x_0$  は同定によって求まる係数である。

これらの式を平衡点近傍 (式 (8)) で線形することにより、式 (9) の線形モデルを導出することができる。こ

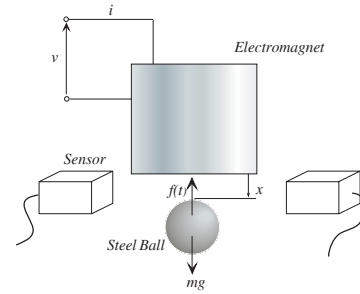


Fig. 3: Magnetic Suspension System

こで  $X$ : 平衡位置、 $I$ : 平衡電流、 $\delta x(t)$ : 平衡位置からの微小変位、 $\delta i(t)$ : 平衡電流からの微小電流である。

$$x(t) = X + \delta x(t), i(t) = I + \delta i(t) \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} = k_x \delta x(t) - k_i \delta i(t) \quad (9)$$

$$k_x = \frac{2kI}{m(X + x_0)^2}, k_i = \frac{2kI^2}{m(X + x_0)^3}$$

ここでもう一度  $x = \delta x$ ,  $i = \delta i$  と再定義し、状態  $\mathbf{x} = [\dot{x} \ x]^T$ 、観測出力  $y = x$ 、制御入力  $u = i$  として状態空間表現すると式 (10) となる。モデルパラメータを Table 1 に示す。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k_i \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Table 1: Nominal Parameters

$m$	0.357[kg]
$k$	$11.641 \times 10^{-4} [\text{Nm}^2/\text{A}^2]$
$x_0$	$4.737 \times 10^{-3} [\text{m}]$
$X$	$5 \times 10^{-3} [\text{m}]$
$I$	0.54[A]

### 4 制御系設計

GIMC 構造のコントローラ設計は上記の 3 つのステップを踏むことになる。始めに Step 1, Step 2 のノミナルコントローラ  $K_0$  とロバストコントローラ  $K$  を  $H_\infty$  混合感度問題により設計する。

$H_\infty$  混合感度問題とは良く知られているように式 (11) の条件を満たす制御則を見つける問題で、 $S$  は感度関数、 $T$  は相補感度関数、 $W_S$  は感度関数重み、 $W_T$  は相補感度関数重みである。

$$\left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (11)$$

$H_\infty$  混合感度問題で用いる一般化プラントを Fig.4 に示す。

$K_0$  の設計に用いる重みを式 (12) に、 $K$  の設計に用いる重みを式 (13) にそれぞれ示す。 $K_0$ ,  $K$  のコントローラ設計では  $K_0$  を高い制御性能を有するように、 $K$  には高いロバスト性を持たせるようにした。

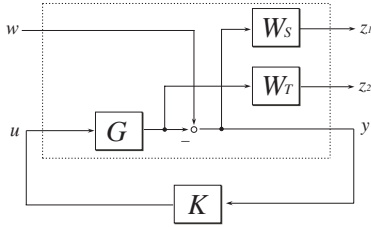


Fig. 4: Generalized Plant

求めた  $H_\infty$  コントローラ  $K_0, K$  を Fig.5 に示す. 実線が  $K_0$ , 破線が  $K$  である. 設計した二つのコントローラは  $K_0$  が高ゲインで高性能,  $K$  が低ゲインでモデル変動に対してロバストであることが分かる.

$$W_{SP} = \frac{500}{s + 0.01},$$

$$W_{TP} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (s + 0.02)(s + 0.1) \quad (12)$$

$$W_{SR} = \frac{10}{s + 0.01},$$

$$W_{TR} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot (s + 0.02)(s + 800) \quad (13)$$

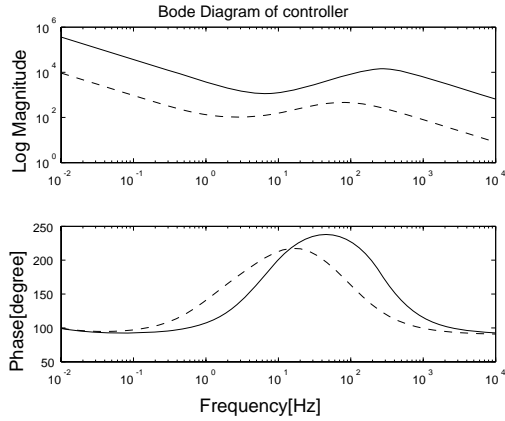


Fig. 5: Bode Diagram of Controllers  $K_0$  and  $K$

最後に Step 3 の内部コントローラ  $Q$  を  $K_0, K$  を用いて導出する. 実際の  $Q$  の計算のためには  $G, K_0$  の状態空間表現を用いた方が便利である.  $G, K_0$  の状態空間表現が以下で与えられたとしよう.

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで  $(A, B)$  が可制御,  $(C, A)$  が可観測, 同様に  $(A_k, B_k)$  が可制御,  $(C_k, A_k)$  が可観測とする.

このとき  $G, K_0$  の左既約分解の状態空間表現は以下で与えられる. ただし,  $L, L_k$  はそれぞれ  $A + LC, A_k + L_k C_k$  を安定化する.

$$[\tilde{N} \quad \tilde{M}] = \left[ \begin{array}{c|c|c} A + LC & B + LD & L \\ \hline C & D & I \end{array} \right] \quad (15)$$

$$[\tilde{V} \quad \tilde{U}] = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_k + L_k C_k & L_k B_k + L_k D_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad (16)$$

## 5 シミュレーションによる検証

通常のフィードバック構造と GIMC 構造 (Fig.1) の違いを比較するため, 設計により求めた二つのコントローラ  $K_0, K$  と GIMC 構造の三つのシミュレーション応答を示す. このシミュレーションではモデルの変動として鉄球の質量の変化と信号の遅れを Table 2 のように考慮した.

Table 2: Perturbed Parameters

	Nominal Parameters	Perturbed Parameters
m[kg]	0.357	0.197
delay[s]	0.000	0.001

ノミナルモデルと変動モデルに対するステップ応答を Fig.6, Fig.7 に示す. ここでステップは平衡位置 5[mm] から 6[mm] への目標値を与えた. 実線が GIMC, 破線が  $K_0$ , 一点鎖線が  $K$  の応答である. Fig.6 のノミナル

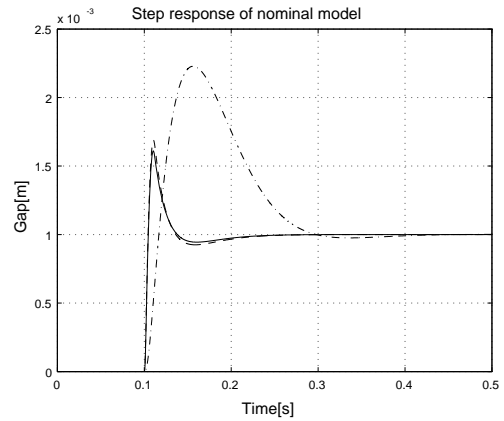


Fig. 6: Step Responses of Nominal Model

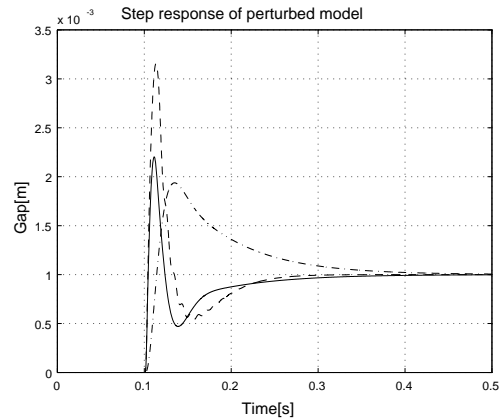


Fig. 7: Step Responses of Perturbed Model

時の応答では GIMC の応答と  $K_0$  の応答がほぼ一致している. そして Fig.7 のモデル変動時の応答は  $K_0$  は大きく変動しているが GIMC は応答を維持している. この結果より GIMC 構造は良好な性能とロバスト性を持つことが分かる.  $K_0$  はノミナル時では良い応答をしているが, モデル変動時では非常に大きく変動を起こしている. 一方  $K$  はノミナル時, モデル変動時ともあまり変化が無いが, 良い制御性能とは言えない.

## 6 制御実験による検証

### 6.1 GIMC 構造 I

まず Fig.1 の GIMC 構造をそのまま用いた場合について検証を行う。シミュレーションと同じく、ノミナル時には Table 1 のパラメータを用い、モデル変動時に Table 2 のパラメータを用いた。ノミナルの応答を Fig.8 に、モデル変動時の応答を Fig.9 に示す。図中の実線が GIMC 構造、破線が  $K_0$ 、一点鎖線が  $K$  の応答を示す。

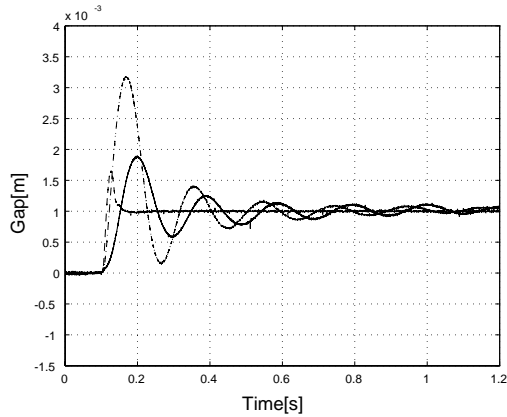


Fig. 8: Step Responses of Nominal Plant

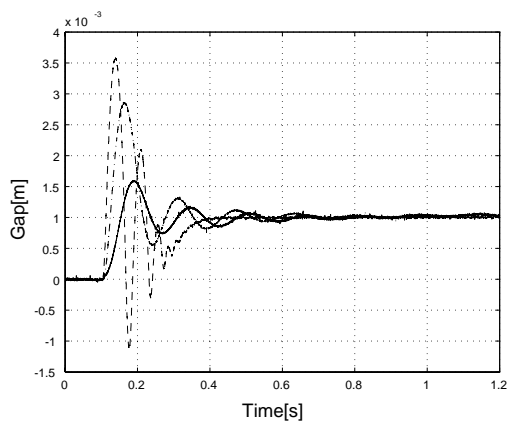


Fig. 9: Step Responses of Perturbed Plant

Fig.8 において、ノミナル時の応答では  $K_0$  は良い応答を示しているが、GIMC 構造はシミュレーションとは違い  $K_0$  と一致した良い応答ではない。Fig.9 のモデル変動時に  $K_0$  は非常に大きく振動しているが、GIMC 構造と  $K$  はあまり変化していない。

### 6.2 GIMC 構造 II

Fig.8 において、ノミナル時に GIMC の応答が  $K_0$  と一致しないのはノミナル時でさえ  $G$  と  $\tilde{G}$  の誤差があり、 $f(s) \neq 0$  となるためである。通常の GIMC 構造ではシミュレーションではノミナル性能とロバスト性を確保することはできるが、実際の制御実験ではノミナル性能を確保出来ない。そこで、Fig.2 の検出器とスイッチを付加した構造を用いた。その応答を Fig.10 に示す。これによりノミナル性能が達成されていることが確認できる。Fig.2 の構造を用いて同様にモデル変動時の応答を計測したが、結果は Fig.9 とほぼ一致した。

Fig.10 において GIMC 構造に検出器とスイッチを加えた構造を用いた場合には、GIMC と  $K_0$  の応答が一

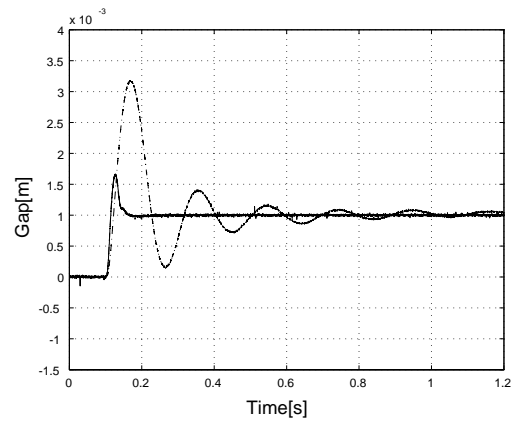


Fig. 10: Step Responses of Nominal Plant with Detector and Switch

致した。このように検出器とスイッチを付加することによってノミナルプラントに対しては良好な性能を実現し、変動プラントに対しては良好なロバスト性を実現した。つまり GIMC 構造により高性能ロバスト制御が実現可能であることが確認された。

## 7 おわりに

本稿では GIMC 構造が高性能とロバスト性を両立できることを実験的に示した。GIMC 構造は高性能なコントローラと高ロバストなコントローラの二つを内部信号によって切り替えることができる。実際に GIMC 構造を磁気浮上システムに応用し、 $H_\infty$  制御と比較検討することによって、高性能ロバストコントローラが実現できることを示した。今後本制御構造の拡張とその耐故障性について検討を進める。

## 参考文献

- 1) Kemin Zhou and John C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall (1998)
- 2) Geir E. Dullerud and Fernando Paganini, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer (1999)
- 3) Kemin Zhou, A Natural Approach to High Performance Robust Control: Another Look at Youla Parameterization, *Proceedings of SICE Annual Conference 2004*, 869/874 (2004)
- 4) Kemin Zhou and Zhang Ren, A New Controller Architecture for High Performance, Robust, and Fault-Tolerant Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.46, No.10, 1613/1618 (2001)
- 5) Daniel U. Campos-Delgado and Kemin Zhou, Reconfigurable Fault-Tolerant Control Using GIMC Structure, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.48, No.5, 832/838 (2003)
- 6) Masayuki Fujita, Toru Namerikawa, Fumio Matsumura and Kenko Uchida,  $\mu$ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.40, No.3, 530/536 (1995)