

H_∞ DIA 制御による磁気軸受の過渡応答性能に関する実験的検証

篠塚 互 (長岡技術科学大学)

滑川 徹* (長岡技術科学大学)

Experimental Evaluation of H_∞ DIA Control for the Magnetic Bearing

Wataru SHINOZUKA (Nagaoka University of Technology)

Toru NAMERIKAWA* (Nagaoka University of Technology)

Abstract

This paper deals with an application of H_∞ DIA control attenuating initial-state uncertainties to the Magnetic Bearing. An H_∞ control problem, which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) control for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed DIA problem supplies H_∞ controls with good transients and assures H_∞ controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a mathematical model of the magnetic bearing which has complicated rotor dynamics and nonlinear magnetic property. Then we apply this proposed H_∞ DIA control for the magnetic bearing, and evaluate its property with the H_∞ DIA control for MIMO systems via control experiments.

キーワード: H_∞ DIA 制御, 初期状態の不確かさ, H_∞ 制御, ロバスト制御, 磁気軸受, メカトロニクス

(Key Words: H_∞ DIA control, Initial-State Uncertainties, H_∞ Control, Robust Control, Magnetic Bearing, Mechatronics)

1 はじめに

精密加工などの分野における制御性能要求は高度化し、ロバスト安定性と良好な目標値追従特性の両方を満たす制御系が求められている。ロバスト性と過渡応答特性を考慮した研究としてはロバスト補償器を用いたフィードバック制御とフィードフォワード制御を併合した2自由度設計が挙げられるが^{[1][2]}、一般にはフィードバック制御系とフィードフォワード制御系の干渉が問題になり、またその干渉が無い制御方策でも、多変数系に応用する場合には設計が複雑となる。一方、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ 制御 (H_∞ DIA 制御) 問題^{[3][4]}は従来の外乱減衰特性のみを考慮した H_∞ 制御に対して、初期状態が不確かであっても、目標値追従において比較的良好な過渡特性を容易に得ることができるものと期待される。本稿では磁気軸受に H_∞ DIA 制御を適用し、外乱と初期状態の不確かさを考慮した H_∞ コントローラを設計し、従来法の比較により H_∞ DIA 制御の良好な外乱除去特性、ロバスト性能、初期値応答性能を実験的に示す。

2 H_∞ DIA 制御

制御対象として以下の線形時不変システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $x \in R^n$ は状態、 $x_0 = x(0)$ は初期状態; $u \in R^r$ は制御入力; $y \in R^m$ は観測出力; $z \in R^q$ は被制御量; $w \in R^p$ は外乱であり、 $w \in L^2[0, \infty)$ とする。

システム (1) に対して、すべての許容制御則 $u(t)$ が以下の線形時不変システムで与えられる。

$$\begin{aligned} u &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\zeta(t)$ はコントローラの状態であり、 J, K, G, H は適切な次元を持つ定数行列であり、(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする。

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の H_∞ DIA 制御問題を考える。

問題 1 H_∞ DIA 制御問題

$N > 0$ が与えられたときに、 $\forall w \in L^2[0, \infty)$ と $\forall x_0 \in R^n$ (ただし $(w, x_0) \neq 0$) に対して z が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2 < \|w\|_2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を H_∞ DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。初期状態 x_0 に対する重み行列 N は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す。

問題を解くために以下の条件を考える。

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で、解 $M > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} &M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ &+ (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ &- M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ &+ C_1^T C_1 - C_1^T D_{12}(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M$ は安定である。

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で、解 $P > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} &(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ &+ P(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ &- P(C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ &+ B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1$ は安定である．

(A3) $\rho(PM) = \max |\lambda_i(PM)| < 1$

上記の仮定のもとで以下の結果が得られている．

定理 1 [3] システム (1) に対して, 仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする．このとき H_∞ セントラルコントローラが以下で与えられる．

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \\ \dot{\zeta} &= A \zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ &\quad + (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

この H_∞ コントローラ (6) が H_∞ DIA 制御であるための必要十分条件は以下の条件 (A4) を満たすことである．

(A4) $Q + N^{-1} - P^{-1} > 0$,

ここで Q は以下の Riccati 方程式の最大解であり, $L := (I - PM)^{-1}$ である．

$$\begin{aligned} &Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ &\quad + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1}) \\ &\quad + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ &\quad + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1})^T Q \\ &\quad - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ &\quad \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

3 システム構成と数学モデル

制御対象である 4 軸制御型磁気軸受の構成図を図 1 に示す．固定子座標系として $l_1 - l_3$, $r_1 - r_3$ 軸と, ロータ座標系として XYZ 軸を図のように定義する．ロータの両端の水平, 鉛直方向にそれぞれ電磁石とホール素子型ギャップセンサが設置されている．ロータは非磁性体であるが電磁石に面してロータ表面に鉄の帯が巻かれていて局所的に電磁石吸引力が働くためスラスト方向は安定な系となる．

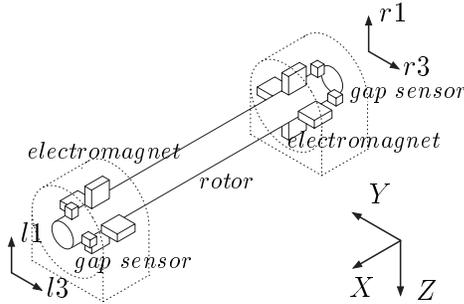


図 1: 磁気軸受

Fig. 1: Magnetic Bearing

システムの状態変数を鉛直, 水平方向に分けてまとめると状態方程式は以下で与えられる^[5]．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_v & p A_{vh} \\ -p A_{vh} & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_v & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v \\ v_h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_v \\ y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_v \\ w_h \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A_v := \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x1} A_1 & 0 & K_{i1} A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L) I_2 \end{bmatrix}$$

$$A_h := \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x3} A_1 & 0 & K_{i3} A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L) I_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{vh} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_v = B_h := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1/L) I_2 \end{bmatrix}$$

$$C_v = C_h := [I_2 \quad 0 \quad 0], \quad D_v = D_h := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & (1/L) I_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/m + l_m^2/J_y & 1/m - l_m^2/J_y \\ 1/m - l_m^2/J_y & 1/m + l_m^2/J_y \end{bmatrix}$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} J_x/2 J_y & -J_x/2 J_y \\ -J_x/2 J_y & J_x/2 J_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_v &= [g_{l1} \ g_{r1} \ \dot{g}_{l1} \ \dot{g}_{r1} \ i_{l1} \ i_{r1}]^T, \quad x_h = [g_{l3} \ g_{r3} \ \dot{g}_{l3} \ \dot{g}_{r3} \ i_{l3} \ i_{r3}]^T \\ u_v &= [e_{l1} \ e_{r1}]^T, \quad u_h = [e_{l3} \ e_{r3}]^T \\ v_v &= [v_{ml1} \ v_{mr1} \ v_{Ll1} \ v_{Lr1}]^T, \quad v_h = [v_{ml3} \ v_{mr3} \ v_{Ll3} \ v_{Lr3}]^T \\ y_v &= [y_{l1} \ y_{r1}]^T, \quad y_h = [y_{l3} \ y_{r3}]^T \\ w_v &= [w_{l1} \ w_{r1}]^T, \quad w_h = [w_{l3} \ w_{r3}]^T \end{aligned}$$

ここで, g_j は各軸方向の変位, i_j は各電磁石電流, e_j は制御電圧, m : ロータの質量, g : 重力加速度, l_m : ロータ重心から電磁石までの距離, K_j は電磁力パラメータ, (J_x, J_y) : (X, Y) 軸回りの慣性モーメント, p : ロータの回転速度, f_j : 電磁石吸引力, v_{mj} : 外乱である．なお各パラメータに付いている添え字 j は左鉛直方向 $l1$, 右鉛直方向 $r1$, 左水平方向 $l3$, 右水平方向 $r3$ に属するパラメータの識別子とする．また本稿では回転速度 p をゼロとして扱う．式 (8) をまとめて, 以下の状態方程式を定義する．

$$\dot{x}_g = A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0$$

$$y_g = C_g x_g + w_0$$

$$x_g = [x_v^T \ x_h^T]^T, \quad u_g = [u_v^T \ u_h^T]^T, \quad v_0 = [v_v^T \ v_h^T]^T, \quad w_0 = [w_v^T \ w_h^T]^T$$

4 制御系設計

まず外乱 v_0 と w_0 に関して考察する． v_0 は入力外乱で, 低周波帯域で影響を及ぼし, w_0 は出力外乱, およびモデルの不確かさを表す．それらに対して重み関数 $W_v(s)$ および $W_w(s)$ を以下の様に導入する．

$$v_0 = W_v(s) w_2, \quad W_v(s) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} W_{v0}(s)$$

$$W_{v0}(s) = C_{v0} (sI_4 - A_{v0})^{-1} B_{v0} \quad (9)$$

$$w_0 = W_w(s) w_1, \quad W_w(s) = I_4 W_{w0}(s)$$

$$W_{w0}(s) = C_{w0} (sI_4 - A_{w0})^{-1} B_{w0} \quad (10)$$

次に被制御変数について考慮する．制御の基本仕様が浮上体の非接触支持であるため, 被制御量として変位 $g_j(t)$ とその微分値 $\dot{g}_j(t)$ を選ぶ．これらの状態変数に, レギュレーションのために行列 Θ で重み付けし, 被制御量 z_1 を以下のよう

に定義する．同様に制御入力のリギュレーションのために u_g に ρ で重み付けした被制御量 z_2 を定義する．

$$z_g = F_g x_g, \quad F_g = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$z_1 = \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_{v1} \quad \theta_{v2} \quad \theta_{h1} \quad \theta_{h2}] \quad (12)$$

$$z_2 = \rho u_g$$

最終的には制御対象と重み行列をまとめ，一般化プラントを以下の式 (13) のように構成する．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (13)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_g & D_g G_v & 0 \\ 0 & A_v & 0 \\ 0 & 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_v \\ 0 & B_v \\ B_w & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [C_g \quad 0 \quad C_w], \quad D_{21} = [W_w \quad 0]$$

$$x := [x_g^T \quad x_v^T \quad x_w^T]^T, \quad w := [w_1^T \quad w_2^T]^T, \quad z := [z_1^T \quad z_2^T]^T$$

$$y := y_g, u := u_g$$

本制御系設計での制御問題は以下で与えられる．

制御問題：一般化プラント (13) に対して DIA 条件 (3) を達成する許容コントローラ $K(s)$ を見つけよ．

上記の制御問題に対する解を得るため，MATLAB 上で繰り返し計算を行い以下の設計パラメータを選定した．

$$W_{v0}(s) = \frac{40000}{s + 0.1},$$

$$W_{w0}(s) = \frac{1.1s^3 + 1.4 \times 10^4 s^2 + 7.3 \times 10^7 s + 3.5 \times 10^{11}}{0.2s^3 + 1.1 \times 10^4 s^2 + 5.1 \times 10^6 s + 2.7 \times 10^{11}}$$

$$\Theta = \text{diag} [\theta_{v1} \quad \theta_{v2} \quad \theta_{h1} \quad \theta_{h2}]$$

$$\theta_{v1} = \text{diag} [0.4 \quad 0.4], \quad \theta_{h1} = \text{diag} [0.5 \quad 0.5]$$

$$\theta_{v2} = \theta_{h2} = \text{diag} [0.0005 \quad 0.0005]$$

$$\rho = 8 \times 10^{-7} \times I_4$$

これによって， H_∞ DIA コントローラ $K_{DIA}(s)$ が直接的に得られた．ここでコントローラ $K_{DIA}(s)$ は 4 入力 4 出力で，次数は 28 次である． $K(s)$ の周波数応答を図 2 に示す．このときの重み行列 N の最大値は $3.31756 \times 10^{-6} \times I$ である．

5 制御実験による性能検証

得られた H_∞ DIA コントローラを実装し，制御実験により性能検証を行う．比較のためにオブザーバを併合した積分型最適状態フィードバックコントローラ (LQ コントローラ) を用いた実験も行う．コントローラの性能検証としてステップ応答 (ノミナル性能)，ロバスト性能，初期値応答を比較した．

実験結果を図 3 ~ 図 8 に示す．

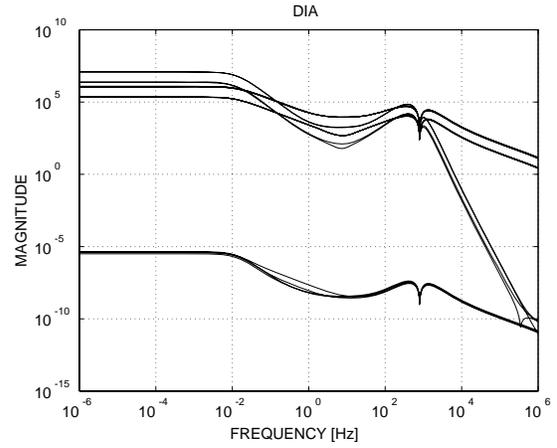


図 2: H_∞ DIA コントローラの周波数応答

Fig. 2: Frequency Responses of H_∞ DIA Controllers

図 3，図 6 は電磁石-ロータ間の定常ギャップ 0.4[mm] における 0.05[mm] のステップ応答である．LQ 制御の方がオーバーシュートもなく，応用が良好であることが分かる．

図 4，図 7 は外乱応答とパラメータ変動後の外乱応答を示す．ここでモデルパラメータ変動として，ロータ (248[g]) に質量 53[g] の重りを付加し質量が 301[g] へ変動させ，外乱としてはステップ状の定常吸引力の約 1/6 の力外乱を加えた．図 4，図 7 より H_∞ DIA 制御が LQ 制御より良好な外乱除去特性とロバスト性能を有していることが確認できる．

図 5，8 はローターがタッチダウンしている状態から浮上させた場合の応答であり， H_∞ DIA 制御が LQ 制御より良好な初期値応答結果を示している．以上により H_∞ DIA 制御の良好な外乱応答性能，ロバスト性能，初期値応答を確認した．

6 おわりに

本稿では外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ DIA 制御問題を磁気軸受に適用し，多入出力系における提案法の有効性を検証した．具体的には LQ 制御と H_∞ DIA 制御の制御実験の応答を比較し，ノミナルなステップ応答を除く外乱除去性能，ロバスト性能，初期値応答特性に提案法が優れていることを確認した．今後は回転運動中のロータに対する H_∞ DIA 制御の有効性を検証する．

参考文献

- [1] 杉江俊治，田内豊，計測自動制御学会論文集，vol. 30，no. 10，pp. 1202-1208，1994.
- [2] 内山泰宏，藤田政之，日本機械学会論文集 (C 偏)，vol. 68，no.673，pp.164-170，2002.
- [3] T. Namerikawa, M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, *Trans. of SICE*, vol.40, no.3, pp.307-314, 2004.
- [4] T. Namerikawa and M. Fujita, *IEEJ Trans. EIS*, Vol.123, No.6, pp.1094-1100, 2003
- [5] 滑川徹，篠塚互，日本機械学会第 8 回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集，330 pp.448-453，2003.

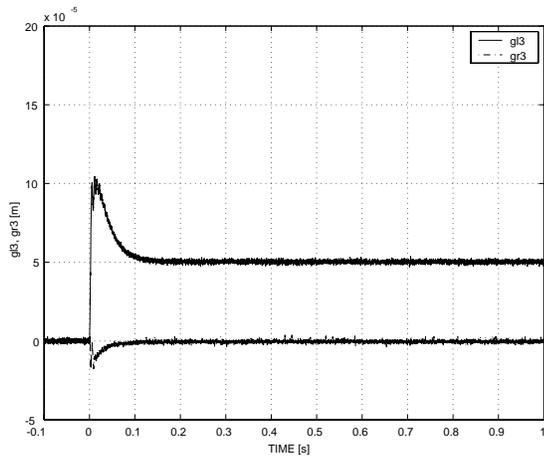


図 3: H_∞ DIA コントローラのステップ応答
Fig. 3: Step Response of H_∞ DIA Controller

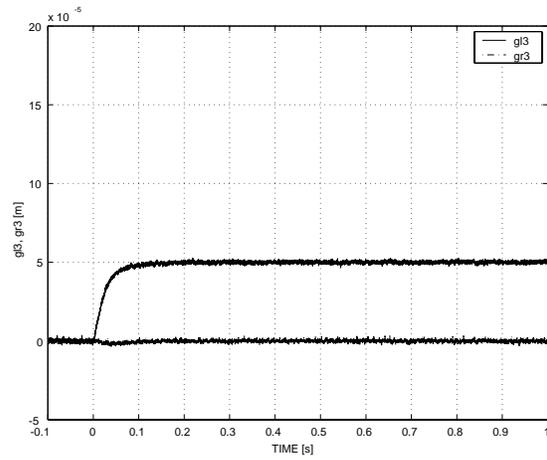


図 6: LQ コントローラのステップ応答
Fig. 6: Step Response of LQ Controller

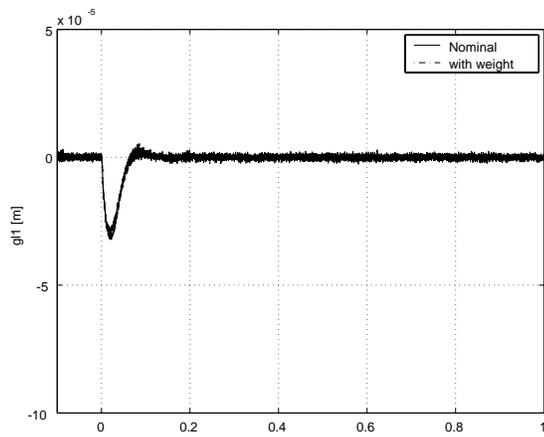


図 4: H_∞ DIA コントローラの外乱応答
Fig. 4: Disturbance Response of H_∞ DIA Controller
with/without perturbation

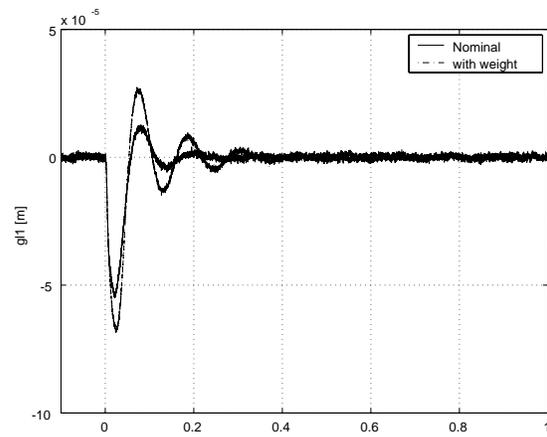


図 7: LQ コントローラの外乱応答
Fig. 7: Disturbance Response of LQ Controller
with/without perturbation

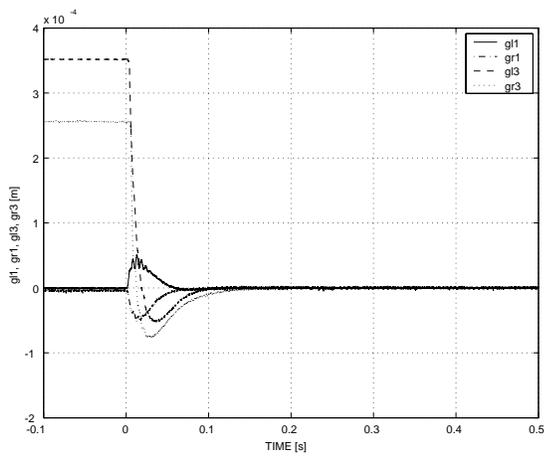


図 5: H_∞ DIA コントローラの初期値応答
Fig. 5: Inistial state Response of H_∞ DIA Controller

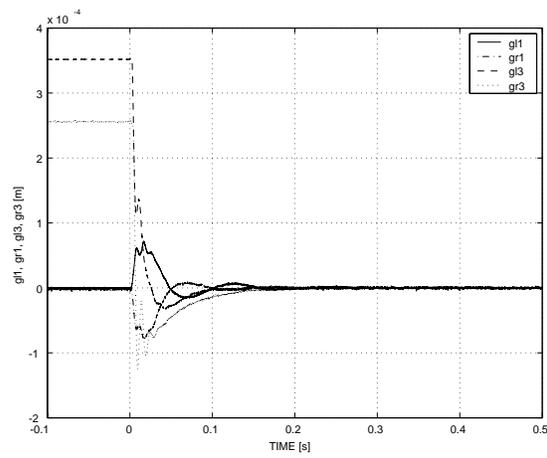


図 8: LQ コントローラの初期値応答
Fig. 8: Inistial state Response of LQ Controller