H$_1$DIA 制御による磁気軸受の回転性能改善に関する検討

Improving the Rotational Performance of a Magnetic Bearing by the H$_1$ DIA Control

○ 瀬戸 洋紀 (長岡技術科学大学)　　滑川　徹 (長岡技術科学大学)

Hiroki SETO, Nagaoka University of Technology, Kamitomiokacho1603-1, Nagaoka, Niigata
Toru NAMERIKAWA, Nagaoka University of Technology

This paper deals with improving the rotational performance of a magnetic bearing using the H$_1$DIA control. H$_1$ DIA control is an H$_1$ control problem which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) and supplies H$_1$ controls with good transients and assure H$_1$ controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a mathematical model of the magnetic bearing which has complicated rotor dynamics and nonlinear magnetic property. Then we apply this proposed H$_1$ DIA control to a magnetic bearing, and evaluate rotational performance via rotational experiments.

Key Words: H$_1$ DIA Control, Initial-State, Magnetic Bearing, Rotational Performance

1.　はじめに

磁気軸受は常電導電磁石の吸引力を用いて，回転体を完全非接触にするため潤滑の問題がなく，真空中など特殊環境下での使用が可能である．また，摩擦や磨耗，騒音などの問題がないために，メンテナンスフリーで長時間運転が可能であり，超高速回転が実現できる．一方，磁気軸受は，本質的に不安定なシステムであり(1)，フィードバック制御による安定(1)，フィードバック制御による安定化が必要不可欠となる．さらに，この磁気軸受は，複数の操作量と制御量が互いに干渉し合う多入出力制御系となっており，システム固有の複雑な制御問題を多く抱えている．それらの制御問題に対して，今まで多くの研究者らによって様々なアプローチにより問題の解決が図られてきた(2) (3)．

我々も，磁気軸受に対して外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H$_1$ 制御 (H$_1$ DIA 制御) を適用することによって，良好な外乱除去特性とロバスト性能，初期値応答性能を有することを確認した(4)．しかし，この研究では，磁気軸受のロータは空中で静止した状態を扱っており，回転状態での性能評価は行われていない．

本稿では，ロータが回転状態にある磁気軸受に対して H$_1$ DIA 制御を適用して回転実験を行い，他の制御方式と比較することによってその回転性能を検証する．

2.　H$_1$ DIA 制御(5)

時間区間 $[0; 1)$ で定義される以下の線形時不変システムを考える．

$$\begin{aligned} \underline{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u; \quad x(0) = x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで $x\ 2\ R^n$ は状態で $x_0 = x(0)$ は初期状態; $u\ 2\ R^r$ は制御入力; $y\ 2\ R^m$ は観測出力; $z\ 2\ R^q$ は被制御量; $w\ 2\ R^p$ は外乱であり，$w(t)$ は区間 $[0; 1)$ において２乗可積分な関数 $(w\ 2\ L^2[0; 1))$ とする．またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく．

$A; B_1; B_2; C_1; C_2; D_{12}; D_{21}$ は適当な次元の定数行列であり，以下の条件を満たすものとする．

² $(A; B_1)$:可安定　$(A; C_1)$:可検出

² $(A; B_2)$:可制御　$(A; C_2)$:可観測

² $D_{12}^T D_{12}\ 2\ R^{r£r}$:正則

² $D_{21} D_{21}^T\ 2\ R^{m£m}$:正則

システム (1) に対して，全ての許容制御則 $u(t)$ が以下の線形時不変システムで与えられ，(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする．

$$\begin{aligned} \underline{^3} &= A_k{}^3 + B_k y; \quad ^3(0) = 0 \\ u &= C_k{}^3 + D_k y \end{aligned} \qquad (2)$$

ここで $^3(t)$ はコントローラの状態であり，有限の次元を持つ．また $A_k; B_k; C_k; D_k$ は適切な次元を持つ定数行列である．

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して，以下の H$_1$ DIA 制御問題を考える．

2.1　H$_1$ DIA 制御問題

$N > 0$ が与えられたときに，全ての $w\ 2\ L^2[0; 1)$ と全ての $x_0\ 2\ R^n$(ただし $(w; x_0) \ne 0$) に対して z が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ．

$$kzk_2^2 < kwk_2^2 + x_0^T N^{i1} x_0 \qquad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を H$_1$ DIA 制御（または単に DIA 制御)(Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ．

初期状態 x_0 に対する重み行列 N は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す．行列不等式の意味でより大きな N を選ぶことは，初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する．この条件により，システムの過渡応答特性の改善が期待できる．

3.　システム構成と数学モデル

制御対象である 4 軸制御型磁気軸受の構成図を Fig.1 に示す．固定子座標系として l_1-l_3，r_1-r_3 軸と，回転子座標系として XYZ 軸を図の様に定義する．ロータの両端の水平，鉛直方向にそれぞれ電磁石とホール素子型ギャップセンサが設置されている．ロータは非磁性体であるが電磁石に面してロータ表面に鉄の帯がまかれていて局所的に電磁石が働くためスラスト方向は安定な系である．

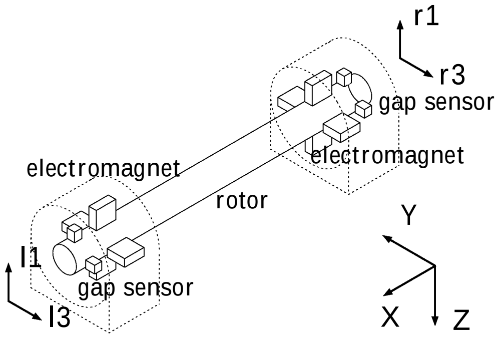

Fig. 1 Magnetic Bearing System

制御対象の状態方程式を導出するために以下の仮定を設ける．

1. 回転子は剛体である．
2. 回転子は回転子軸に対して回転対称である．
3. 電磁石に発生する速度起電力は小さく，無視できる．
4. 8 個の電磁石は全て同じ特性を持つ．
5. 電磁石の抵抗，インダクタンスは定数とする．

上記の仮定の下で数学モデルを導出し，鉛直，水平方向に分けてまとめると磁気軸受の状態方程式は以下のように表せる[(6)]．

$$\begin{bmatrix}\dot x_v\\ \dot x_h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_v & pA_{vh}\\ -pA_{vh} & A_h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_v\\ x_h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_v & 0\\ 0 & B_h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_v\\ u_h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D_v & 0\\ 0 & D_h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_v\\ v_h\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_v\\ y_h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_v & 0\\ 0 & C_h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_v\\ x_h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}w_v\\ w_h\end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$A_v := \begin{bmatrix}0 & I_2 & 0\\ K_{x1}A_1 & 0 & K_{i1}A_1\\ 0 & 0 & -(R/L)I_2\end{bmatrix}$$

$$A_h := \begin{bmatrix}0 & I_2 & 0\\ K_{x3}A_1 & 0 & K_{i3}A_1\\ 0 & 0 & -(R/L)I_2\end{bmatrix}$$

$$A_{vh} := \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ B_v = B_h := \begin{bmatrix}0\\ 0\\ (1/L)I_2\end{bmatrix}$$

$$C_v = C_h := \begin{bmatrix}I_2 & 0 & 0\end{bmatrix};\ D_v = D_h := \begin{bmatrix}0 & 0\\ A_1 & 0\\ 0 & (1/L)I_2\end{bmatrix}$$

$$A_1 := \begin{bmatrix}1/m + l_m^2/J_y & 1/m - l_m^2/J_y\\ 1/m - l_m^2/J_y & 1/m + l_m^2/J_y\end{bmatrix}$$

$$A_2 := \begin{bmatrix}J_x/2J_y & -J_x/2J_y\\ -J_x/2J_y & J_x/2J_y\end{bmatrix}$$

$$x_v = [g_{l1}\ g_{r1}\ g_{l1}\ g_{r1}\ i_{l1}\ i_{r1}]^T;\ x_h = [g_{l3}\ g_{r3}\ g_{l3}\ g_{r3}\ i_{l3}\ i_{r3}]^T$$
$$u_v = [e_{l1}\ e_{r1}]^T;\quad u_h = [e_{l3}\ e_{r3}]^T$$
$$v_v = [v_{ml1}\ v_{mr1}\ v_{Ll1}\ v_{Lr1}]^T;\ v_h = [v_{ml3}\ v_{mr3}\ v_{Ll3}\ v_{Lr3}]^T$$
$$y_v = [y_{l1}\ y_{r1}]^T;\quad y_h = [y_{l3}\ y_{r3}]^T$$
$$w_v = [w_{l1}\ w_{r1}]^T;\quad w_h = [w_{l3}\ w_{r3}]^T$$

(4) 式をまとめて，以下の状態方程式を定義する．

$$\begin{cases}\dot x_g = A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0\\ y_g = C_g x_g + w_0\end{cases} \qquad (5)$$

$$x_g = [x_v^T x_h^T]^T; u_g = [u_v^T u_h^T]^T; v_0 = [v_v^T v_h^T]^T; w_0 = [w_v^T w_h^T]^T$$

4. 制御系設計

本節では，磁気軸受システムの線形状態空間表現を用い，磁気軸受システムに対して制御系設計を行う．

4.1 一般化プラントの構成と問題設定

まず (5) 式において系に加わる外乱 v_0，w_0 は一般になんらかの周波数特性を持つと考えられる．v_0 は，パラメータ誤差や無視された非線形性による不確かさ，また w_0 は理想化や簡略化に起因するモデルの不確かさを表す．それらに対して重み関数 W_v および W_w を導入して (6) 式に示すように外乱入力を定量的に特徴づける．重み関数は，それぞれの外乱の加わる周波数帯域でゲインが大きくなるように選ぶ．以下のように 1 入出力の重み関数 W_{v0}, W_{w0} を用いて, 多入出力重み関数 W_v および W_w を導入し v_0，w_0 を定義する．ここで I_4 は 4 次の単位行列である．

$$v_0(s) = W_v(s)w_2(s);\quad w_0(s) = W_w(s)w_1(s) \qquad (6)$$

$$W_v(s) = \begin{bmatrix}I_2 & 0\\ I_2 & 0\\ 0 & I_2\\ 0 & I_2\end{bmatrix} W_{v0}(s);\quad W_w(s) = I_4 W_{w0}(s)$$

$$W_{v0}(s) = C_{v0}(sI_4 - A_{v0})^{-1}B_{v0}$$
$$W_{w0}(s) = C_{w0}(sI_4 - A_{w0})^{-1}B_{w0} \qquad (7)$$

次に被制御量について考慮する．被制御量として定常ギャップからの微小変位 $g_j(t)$ とその速度 $g_j(t)$ を選ぶ．これらの状態変数に，良好な時間応答特性を得るために行列 Θ で重み付けし，被制御量 z_1 を以下のように定義する．同様に制御入力のレギュレーションのために u_g に ρ で重み付けした被制御量 z_2 を定義する．

$$z_1 = \Theta z_g;\quad \Theta = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}\theta_{v1} & \theta_{v2} & \theta_{h1} & \theta_{h2}\end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$z_g = F_g x_g;\quad F_g = \begin{bmatrix}I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0\end{bmatrix}$$

$$z_2 = \rho u_g \qquad (9)$$

最終的には制御対象と重み行列をまとめ，一般化プラントを (10) 式のように構成する．このブロック線図は Fig.2 で表される．なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい．

$$\begin{aligned}\dot x &= Ax + B_1 w + B_2 u\\ z &= C_1 x + D_{12} u\\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned} \qquad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix}A_g & D_g G_v & 0\\ 0 & A_v & 0\\ 0 & 0 & A_w\end{bmatrix};\ B_1 = \begin{bmatrix}0 & D_g D_v\\ 0 & B_v\\ B_w & 0\end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix}B_g\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\ C_1 = \begin{bmatrix}\Theta F_g & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ D_{12} = \begin{bmatrix}0\\ \rho\end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix}C_g & 0 & C_w\end{bmatrix};\ D_{21} = \begin{bmatrix}W_w & 0\end{bmatrix}$$

ここで $x := [x_g^T\ \ x_v^T\ \ x_w^T]^T$, $y := y_g$, $u := u_g$, $w := [w_1^T\ \ w_2^T]^T$, $z := [z_1^T\ \ z_2^T]^T$ とおく．

本制御系設計での制御問題は以下で与えられる．

制御問題：一般化プラント (10) に対して DIA 条件 (3) を達成する許容コントローラ K(s) を見つけよ.

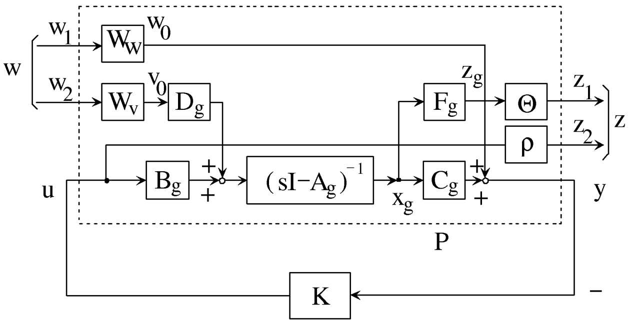

Fig. 2 一般化プラント

4.2 H_∞ DIA コントローラの設計

上記の制御問題に対する解を得るため，MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって以下の設計パラメータを選定した．$W_{v0}(s)$ は低周波帯域に重み付けするため 1 次の伝達関数で表す. また, $W_{w0}(s)$ はモデル化時にロータを剛体と仮定したモデルには含まれないロータの 1 次振動モードを許容するために, 共振周波数 800Hz がピークの 2 次の伝達関数で表す.

$$W_{v0}(s) = \frac{40000}{s+0.1} \tag{11}$$

$$W_{w0}(s) = \frac{1.5(s+1.07\times10^4)(s+2.51\times10^3\pm4.35\times10^3 i)}{(s+5.34\times10^4)(s+5.0\times10^{-1}\pm5.03\times10^3 i)}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mu_{v1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{v2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{h1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{h2} \end{bmatrix};\ \mu_{v1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{h1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix};\ \mu_{v2} = \mu_{h2} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$\rho = 8\times10^{-6}\times I_4$$

これによって，H_∞ DIA コントローラ $K_{DIA}(s)$ が直接的に得られる．ここでコントローラ $K_{DIA}(s)$ は 4 入力 4 出力で, 次数は 28 次である．

このときの重み行列 N の最大値は $3.31756\times10^{-6}\times I$ である． また，回転実験に際して，モデルでの回転速度 p を 628.3[rad/s](6000[rpm]) に設定して，コントローラを設計している．よって，回転実験では，このコントローラを使用して実験を行っている．

5. 制御実験による評価

得られらた H_∞ DIA コントローラを実装し，制御実験により制御性能の検証を行う．比較のためにオブザーバを併合した積分型最適フィードバックコントローラ (LQ コントローラ) を用いた実験も行う．制御実験としては，ロータが静止状態の場合と回転状態での場合で行った．

5.1 静止状態での性能評価

ここでは，ロータを静止状態にして制御実験を行った．性能検証としてロバスト性能を LQ コントローラによる応答と比較した．実験結果を Fig.3，Fig.6 に示す．

Fig.3，Fig.6 は外乱応答とパラメータ変動後の外乱応答を示す．ここでモデルパラメータ変動として，ロータ (248[g]) に質量 53[g] の重りを付加し質量を 301[g] へと変動させた．ステップ状外乱として定常吸引力の約 1/6 の力外乱を加えた．Fig.3, Fig.6 より H_∞ DIA 制御が LQ 制御より良好な外乱除去特性とロバスト性能を有していることが確認できる．一方、ステップ目標値応答では、LQ 制御の方が良好な応答を示していた。

5.2 回転状態での性能評価

ここでは，ロータを回転させて制御実験を行った．具体的には，10000[rpm] 程度まで回転数を上げてから無負荷状態にして回転数が完全に止まるまでの応答を確認した．実験では，6000[rpm] よりデータを取得している．実験結果を Fig.4,5,7,8 に示している．

Fig.4，Fig.7 は，縦軸に磁気軸受の左端鉛直方向の変位 g_{l1}，横軸に時間をとったグラフである．この 2 つのグラフで，ゼロ秒の時がちょうど 6000[rpm] の時の鉛直方向の振れ回りを示している．時間が経つ (回転数が減少する) につれて振れ回りの大きさが変化しているのが分かる．ここで，両者を比較してみると，H_∞ DIA コントローラの方が LQ コントローラよりも振れ回りをより小さく抑えていることが分かる．また，Fig.4,7 共に，約 20 秒前後 (約 1500[rpm] 付近) で振れ回りが最も大きくなっていることが分かる．しかし，H_∞ DIA コントローラでは LQ コントローラに比べ，その変動は小さく抑えられており両者の性能の違いが顕著に表れている．

続いて，Fig.5，Fig.8 は，磁気軸受左端におけるリサージュ図を示している．縦軸は鉛直方向の変位で，横軸は水平方向の変位を表している．これは，6000[rpm] から 0[rpm] までのデータをリサージュ図にしている．結果としては，先ほどの Fig.4 と Fig.7 が示すものと同じで，LQ コントローラより H_∞ DIA コントローラの方がより振れ回りを抑えていることが分かる．

この回転実験では，H_∞ DIA 制御が最適制御に比べて効果的に振れ回りを抑えていることが分かった．

6. おわりに

本稿では，磁気軸受の H_∞ DIA 制御による回転性能改善に対する有効性の検証を行った．具体的には，LQ 制御と H_∞ DIA 制御の回転実験を行いそれぞれの応答を比較することによって，H_∞ DIA 制御が良好な回転性能を持つことを確認した．今後は，一定の回転数における応答を確認し H_∞ DIA 制御の有効性が認められれば，それぞれの回転数におけるコントローラを設計し回転数により切替え制御を行い回転性能の改善を図る．

文　献

(1) 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会編, “磁気浮上と磁気軸受,” コロナ社, 1998.

(2) 野波健蔵, 井出訓之, 上山拓知, “ディスクリプタ ∞ 設計に基づく磁気軸受系のロバスト制御,” 日本機械学会論文集, C 編, 63(606), 457-463, 1997.

(3) S. Sivrioglu, 野波健蔵, 山内　明, 前島　靖, “ジャイロ効果を有するオーバハングロータ・磁気軸受系のゲインスケジュール H_∞ 制御,” 日本機械学会論文集, C 編, 63(610), 1940-1947, 1997.

(4) W. Shinozuka and T. Namerikawa, “Improving the Transient Response of Magnetic Bearings by the H_∞ DIA Control,” IEEE Proc. of the CCA, pp.1130-1135, Taiwan, Sep., 2004.

(5) T. Namerikawa, M. Fujita, R. S. Smith and K. Uchida, “On the H_∞ Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties,” Trans. SICE, vol.40, no.3, pp.307-314, 2004.

(6) 滑川 徹, 篠塚 亙, “初期状態の不確かさを考慮した H_∞ DIA 制御の磁気軸受への応用,” 第 8 回 MOVIC'03, pp.448-453, 2003.

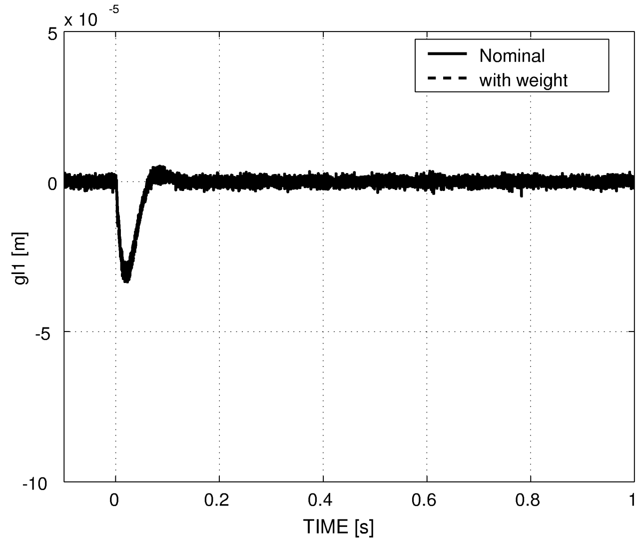

Fig. 3 Disturbance Response of H_1 DIA Controller with/without perturbation

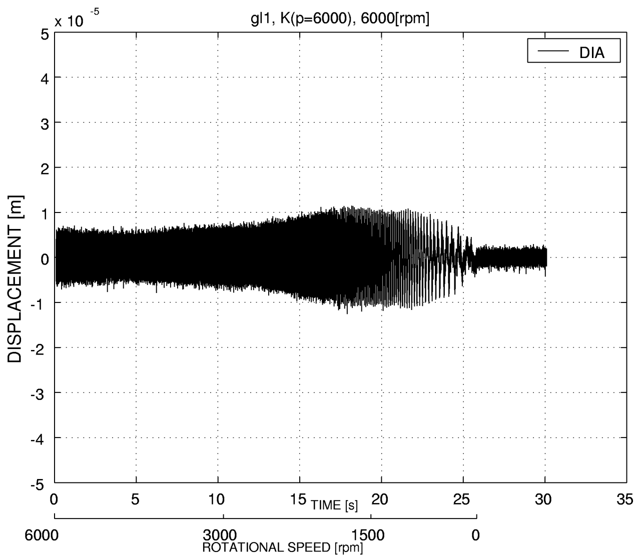

Fig. 4 Displacement of Vertical Axis by DIA Controller

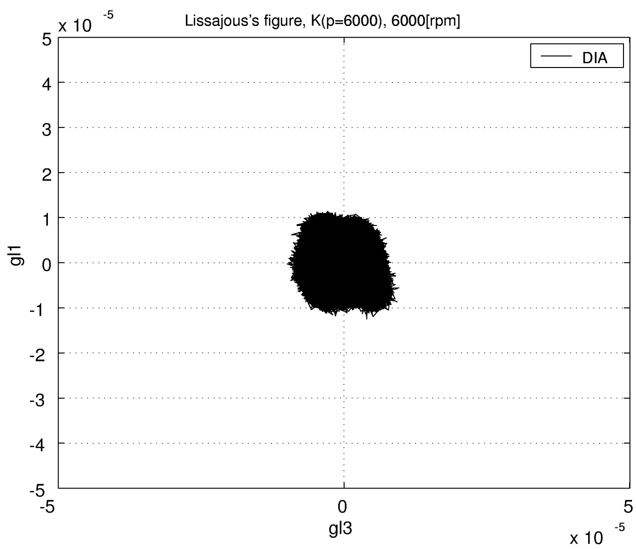

Fig. 5 Lissajous curve of H_1 DIA Controller

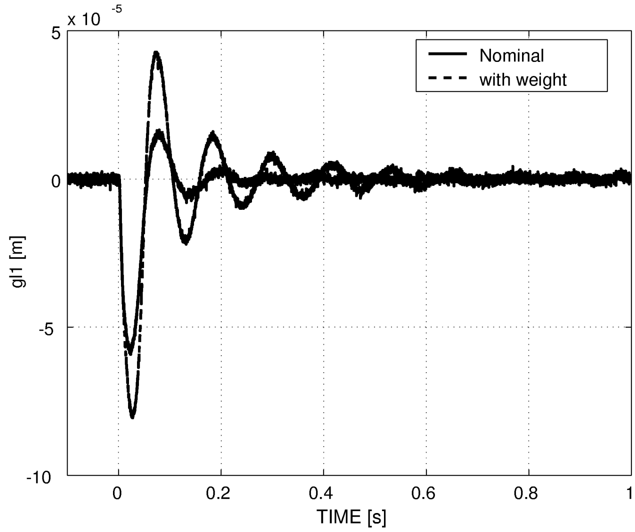

Fig. 6 Disturbance Response of LQ Controller with/without perturbation

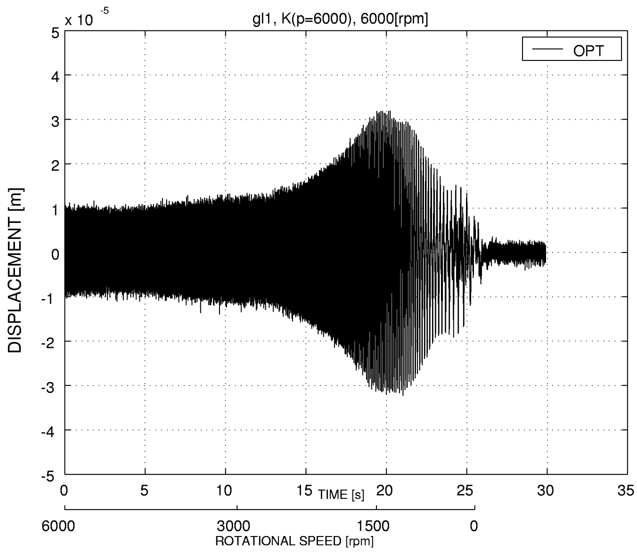

Fig. 7 Displacement of Vertical Axis by LQ Controller

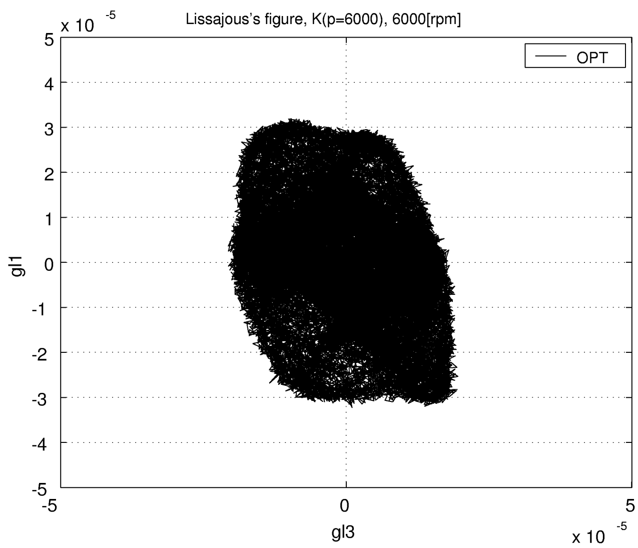

Fig. 8 Lissajous curve of LQ Controller