

# $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御による磁気軸受の過渡応答改善に関する研究

滑川 徹\* 篠塚 互 (長岡技術科学大学)

## On the $\mathcal{H}_\infty$ DIA Control and Transient Response of Magnetic Bearings

Toru Namerikawa and Wataru Shinozuka (Nagaoka University of Technology)

### Abstract

This paper deals with an application of  $\mathcal{H}_\infty$ DIA control attenuating initial-state uncertainties to magnetic bearings. An  $\mathcal{H}_\infty$  control problem, which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) control for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed DIA problem supplies  $\mathcal{H}_\infty$  controls with good transients and assures  $\mathcal{H}_\infty$  controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a mathematical model of the magnetic bearing which has complicated rotor dynamics and nonlinear magnetic property. Then we apply this proposed  $\mathcal{H}_\infty$ DIA control for the magnetic bearing, and evaluate its property for MIMO mechatronic systems via simulations.

キーワード:  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御, 初期状態の不確かさ,  $\mathcal{H}_\infty$  制御, ロバスト制御, 磁気軸受, メカトロニクス

(Keywords:  $\mathcal{H}_\infty$ DIA control, Initial-State Uncertainties,  $\mathcal{H}_\infty$  Control, Robust Control, Magnetic Bearing, Mechatronics)

### 1 はじめに

$\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御問題 (外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $\mathcal{H}_\infty$  制御問題) は, 初期状態が不確かであっても目標値追従において良好な過渡特性を得ることができる設計法であると期待され, この制御問題は近年盛んに研究されている切替制御の実装法の一つとして有効であると考えられる. 外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御問題については, 直交条件を含む制御対象に限定されていたが [1, 2], 実システムに本手法を応用するには, 制御系設計の自由度が制約を受け, 実用上十分でない [3]. そこで文献 [4] では従来の結果から直交条件を外して, 外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御問題を定式化し, 可解条件の必要十分条件を導出し, ある 1 つの具体的な制御方を提示した.

本稿では磁気軸受に対して  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御を応用し, その有効性を検証する. 磁気軸受は非接触支持が可能のため摩擦や磨耗がなく, そのため電力貯蔵用フライホイール, 真空ポンプなどに応用されている [5]. しかし, モデルの不確かさや, 電磁石吸引力の非線形性, 不釣り合い振動やジャイロ効果などロータダイナミクスに起因した制御問題がある [6]. また安定化だけでなく, 目標値追従特性についても向上が期待される.

そこで本研究では  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御を磁気軸受に応用し, ロバスト性と過渡応答特性を考慮した磁気軸受制御系を構成することを目的とする. まず, ロータダイナミクスや電磁石の非線形特性などを考慮した磁気軸受の数学モデルを作成し, 次に文献 [4] の結果を用いて, 磁気軸受に対して制御系設計を行う. 最後に数値シミュレーションにより  $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御の過渡応答性能, 初期状態の不確かさに対する性能, また外乱応答やモデル変動に対する応答などについて評価検討を行う.

### 2 $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御

#### 2.1 問題設定

時間区間  $[0, \infty)$  で定義される以下の線形時不変システムを考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} u \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in R^n$  は状態,  $x_0 = x(0)$  は初期状態,  $u \in R^r$  は制御入力,  $y \in R^m$  は観測出力,  $z \in R^q$  は被制御量,  $w \in R^p$  は外乱であり,  $w(t)$  は区間  $[0, \infty)$  において 2 乗可積分な関数 ( $w \in L^2[0, \infty)$ ) とする. またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく.

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$  は適当な次元を有する定数行列であり, 以下の条件を満たすものとする.

- $(A, B_1)$ : 可制御       $(A, C_1)$ : 可観測
- $(A, B_2)$ : 可制御       $(A, C_2)$ : 可観測
- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$ : 正則
- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$ : 正則

システム (1) に対して, すべての許容制御則  $u(t)$  が以下の線形時不変システムで与えられ, (1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする.

$$\begin{aligned} u &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\zeta(t)$  はコントローラの状態であり, 有限の次元を持つ. また  $J, K, G, H$  は適切な次元を持つ定数行列である.

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御問題を考える。

### 問題 1 $\mathcal{H}_\infty$ DIA 制御問題

$N > 0$  が与えられたときに、すべての  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $\mathcal{H}_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。

初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す。行列不等式の意味でより大きな  $N$  を選ぶことは、初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する。

#### 2.2 $\mathcal{H}_\infty$ DIA コントローラ

DIA 制御は初期状態が既知である場合にはある  $\mathcal{H}_\infty$  制御になる。このことにより DIA 制御もそれに類似した制御則の構造を持つ。問題を解くために以下の条件を考える。

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で、解  $M > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} & M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ & + (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ & - M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ & + C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで以下の行列は安定である。

$$\begin{aligned} & A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 \\ & - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M \end{aligned} \quad (5)$$

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で、解  $P > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ & + P (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ & - P (C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ & + B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで以下の行列は安定である。

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1 \end{aligned} \quad (7)$$

(A3)  $\rho(PM) < 1$

ここで  $\rho(X)$  は行列  $X$  のスペクトル半径を表し、 $\rho(X) = \max |\lambda_i(X)|$  である。

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる。

#### 定理 1 [4]

システム (1) に対して、仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする。このとき  $\mathcal{H}_\infty$  セントラルコントローラが以下で与えられ、

$$u = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A\zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ &+ (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

この  $\mathcal{H}_\infty$  セントラルコントローラ (8) が DIA 制御であるための必要十分条件は以下の条件 (A4) を満たすことである。

(A4)  $Q + N^{-1} - P^{-1} > 0$ ,

ここで  $Q$  は以下の Riccati 方程式の最大解である。

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1}) \\ & + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1})^T Q \\ & - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ & = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $L := (I - PM)^{-1}$ 。

## 3 システム構成と数学モデル

### 3.1 磁気軸受

制御対象である磁気軸受は LaunchPoint 社の 4 軸制御型磁気軸受 MBC500 であり、その構成図を Fig.1 に示す。ロータの両端に対して水平、鉛直方向に挟み込むように電磁石が設置され、両端の水平、鉛直方向に対して 1 つずつのホール素子型ギャップセンサが設置されている。ここで制御目的は 4 対の電磁石の吸引力を制御することで、ロータを安定に非接触浮上・回転させることである。ロータは非磁性体であるが電磁石に対面する部分のみ鉄となっている。このためスラスト方向は受動的に安定となる。

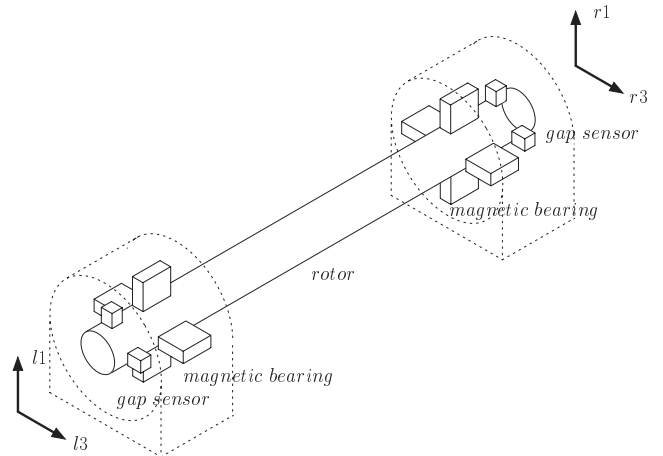


Fig. 1: Magnetic Bearing

次に制御対象の運動方程式を求める際に以下の仮定を置く。

- 回転子は剛体である。
- 回転子は回転子軸に対して回転対称である。
- 電磁石に発生する速度起電力は小さく、無視できる。

- 8 個の電磁石はすべて特性が等しい .
- 電磁石の抵抗, インダクタンスは定数とする .

これらの仮定のもとで, ロータ (Fig.2) の  $Y, Z$  方向の並進運動, および  $Y, Z$  軸に対する回転運動の方程式を以下に示す .

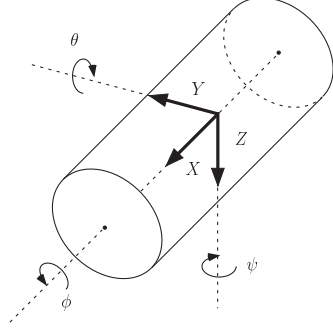


Fig. 2: Rotor

$$m\ddot{y}_s = -f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3} \quad (10)$$

$$m\ddot{z}_s = mg - f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1} \quad (11)$$

$$J_y\ddot{\theta} = -J_x p\dot{\psi} + lm(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \quad (12)$$

$$J_y\ddot{\psi} = -J_x p\dot{\theta} + lm(-f_{l3} - v_{ml3} + f_{r3} + v_{mr3}) \quad (13)$$

ここで,  $y_s(t)$ :  $Y$  軸方向の変位,  $z_s(t)$ :  $Z$  軸方向の変位,  $\theta(t)$ :  $Y$  軸回りの回転角,  $\psi(t)$ :  $Z$  軸回りの回転角,  $m$ : ロータの質量,  $g$ : 重力加速度,  $l_m$ : ロータ重心から電磁石までの距離,  $J_x$ :  $X$  軸回りの慣性モーメント,  $J_y$ :  $Y, Z$  軸回りの慣性モーメント,  $p$ : ロータの回転速度,  $f_j$ : 電磁石吸引力,  $v_{mj}$ : 外乱である .

なお各パラメータの添え字は Fig.1 において,  $l1$ : 左鉛直方向,  $r1$ : 右鉛直方向,  $l3$ : 左水平方向,  $r3$ : 右水平方向, を表し, その総称として  $j = \{l1, r1, l3, r3\}$  とする . 制御対象の物理パラメータを Table 1 に示す .

運動方程式 (10), (11), (12), (13) の変数を定常ギャップからの微小変位  $g_j(t)$  を用いて以下に示す .

$$y_s = -(g_{l3} + g_{r3})/2 \quad (14)$$

$$z_s = -(g_{l1} + g_{r1})/2 \quad (15)$$

$$\theta = (g_{l1} - g_{r1})/2l_m \quad (16)$$

$$\psi = (-g_{l3} + g_{r3})/2l_m \quad (17)$$

これらの変換式を用いて運動方程式 (10), (11), (12), (13) を微小変位  $g_j(t)$  に関する運動方程式 (18), (19), (20), (21) に変換する .

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{l1} &= -\ddot{z} + l_m\ddot{\theta} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) - \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l3} + \dot{g}_{r3}) \\ &\quad + \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{r1} &= -\ddot{z} - l_m\ddot{\theta} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) + \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l3} + \dot{g}_{r3}) \end{aligned}$$

$$-\frac{l_m^2}{J_y}(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{l3} &= -\ddot{y} + l_m\ddot{\psi} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) - \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l1} + \dot{g}_{r1}) \\ &\quad + \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l3} + v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{r3} &= -\ddot{y} - l_m\ddot{\psi} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) + \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l1} + \dot{g}_{r1}) \\ &\quad - \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l3} + v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) \end{aligned} \quad (21)$$

電磁石の吸引力式は以下の非線形方程式で与えられる .

$$f_j = k \frac{(i_j + 0.5)^2}{(g_j - 0.0004)^2} - k \frac{(i_j - 0.5)^2}{(g_j + 0.0004)^2} \quad (22)$$

磁気軸受はあまり動作点が変化しないため, 電磁石吸引力式 (22) を定常動作点付近で 1 次項までに近似する .

$$\begin{aligned} f_j &= k \frac{(I_j + 0.5)^2 - (I_j - 0.5)^2}{1.6 \times 10^{-7}} \\ &\quad + K_{xj}g_j + K_{ij}i_j \end{aligned} \quad (23)$$

$$K_{xj} = -2k \left( \frac{(I_j + 0.5)^2}{(-4 \times 10^{-4})^3} + \frac{(I_j - 0.5)^2}{(4 \times 10^{-4})^3} \right)$$

$$K_{ij} = 2k \left( \frac{(I_j + 0.5)}{(-4 \times 10^{-4})^2} - \frac{(I_j - 0.5)}{(4 \times 10^{-4})^2} \right)$$

また電磁石の等価電気回路方程式は以下で与えられる .

$$L \frac{di_j(t)}{dt} + R(I + i_j(t)) = E_j + e_j(t) + v_{Lj}(t) \quad (24)$$

ここで,  $i_j(t)$ : 定常電流からの微小変化量,  $e_j(t)$ : 定常電圧からの微小変化量,  $v_{Lj}$ : ノイズである .

観測出力  $y_j(t)$  はギャップセンサによって得られるロータの位置情報  $g_j(t)$  とし, 以下の式とする . ただしここで  $w_j(t)$  はセンサノイズやモデルの不確かさの影響を表す .

$$y_j(t) = g_j(t) + w_j \quad (25)$$

Table 1: Model Parameters

Parameter	Symbol	Value
Mass of the Roter	$m$	0.2629[kg]
Length of the Roter	$L_R$	0.269[m]
Distance between Center and Electromagnet	$l_m$	0.1105[m]
Moment of Inertia about X	$J_x$	$5.053 \times 10^{-6}$ [kgm <sup>2</sup> ]
Moment of Inertia about Y	$J_y$	$1.585 \times 10^{-3}$ [kgm <sup>2</sup> ]
Steady Gap	$G$	$0.4 \times 10^{-3}$ [m]
Coefficients of $f_j(t)$	$k$	$2.8 \times 10^{-7}$
steady Current(vertical)	$I_{l1}, I_{r1}$	0.1425[A]
steady Current(horizontal)	$I_{l3}, I_{r3}$	0[A]
Resistance	$R$	4[Ω]
Inductance	$L$	$8.8 \times 10^{-4}$ [H]
Steady Voltage(vertical)	$E_{l1}, E_{r1}$	0.57[V]
Steady Voltage(horizontal)	$E_{l3}, E_{r3}$	0[V]

### 3.2 システムの状態方程式

式 (18) ~ (25) を鉛直, 水平方向に分けてまとめると磁気軸受の状態方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_v & pA_{vh} \\ -pA_{vh} & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_v & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v \\ v_h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_v \\ y_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_v \\ w_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x_v &= [g_{l1} \ g_{r1} \ \dot{g}_{l1} \ \dot{g}_{r1} \ i_{l1} \ i_{r1}]^T \\ x_h &= [g_{l3} \ g_{r3} \ \dot{g}_{l3} \ \dot{g}_{r3} \ i_{l3} \ i_{r3}]^T \\ u_v &= [e_{l1} \ e_{r1}]^T, \quad u_h = [e_{l3} \ e_{r3}]^T \\ v_v &= [v_{ml1} \ v_{mr1} \ v_{Ll1} \ v_{Lr1}]^T \\ v_h &= [v_{ml3} \ v_{mr3} \ v_{Ll3} \ v_{Lr3}]^T \\ y_v &= [y_{l1} \ y_{r1}]^T, \quad y_h = [y_{l3} \ y_{r3}]^T \\ w_v &= [w_{l1} \ w_{r1}]^T, \quad w_h = [w_{l3} \ w_{r3}]^T \\ A_v &:= \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x1}A_1 & 0 & K_{i1}A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L)I_2 \end{bmatrix} \\ A_h &:= \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x3}A_1 & 0 & K_{i3}A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L)I_2 \end{bmatrix} \\ A_{vh} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_v &= B_h := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1/L)I_2 \end{bmatrix} \\ C_v &= C_h := [I_2 \ 0 \ 0] \\ D_v &= D_h := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & (1/L)I_2 \end{bmatrix} \\ A_1 &:= \begin{bmatrix} 1/m + l_m^2/J_y & 1/m - l_m^2/J_y \\ 1/m - l_m^2/J_y & 1/m + l_m^2/J_y \end{bmatrix} \\ A_2 &:= \begin{bmatrix} J_x/2J_y & -J_x/2J_y \\ -J_x/2J_y & J_x/2J_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで  $I_2$  は 2 次の単位行列とし,  $K_{x1} = K_{x11} = K_{xr1}$ ,  $K_{x3} = K_{x13} = K_{xr3}$ ,  $K_{i1} = K_{i11} = K_{ir1}$ ,  $K_{i3} = K_{i13} = K_{ir3}$  とおく. また本稿では回転速度  $p$  をゼロとして扱う. 式 (26) をまとめると, 以下の状態方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで  $x_g := [x_v^T \ x_h^T]^T$ ,  $u_g := [u_v^T \ u_h^T]^T$ ,  $v_0 := [v_v^T \ v_h^T]^T$ ,  $w_0 = [w_v^T \ w_h^T]^T$  であり,  $A_g, B_g, C_g, D_g$  は適当なサイズの行列である.

## 4 制御系設計

### 4.1 一般化プラントの構成と問題設定

まず外乱  $v_0(t)$  と  $w_0(t)$  に関して考察する.  $v_0$  は入力外乱で, 低周波帯域で影響を及ぼす. また  $w_0$  は出力外乱, および

モデルの不確かさを表す. そこで重み関数  $W_v$  および  $W_w$  を導入し  $v_0, w_0$  を以下のように表す.

$$\begin{aligned} v_0 &= W_v(s)w_2 \quad (28) \\ W_v &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} C_w (sI_4 - A_w)^{-1} B_w, \\ w_0 &= W_w w_1 \quad (29) \end{aligned}$$

次に被制御変数について考慮する. 制御の基本仕様が浮上体の非接触支持であるため, 被制御量としてギャップの微小変位  $g_j(t)$  とその速度  $\dot{g}_j(t)$  を選ぶ. これらの変数にレギュレーションのために行列  $\Theta$  で重み付けし, 被制御量  $z_1$  を以下のように定義する. 同様に制御入力  $u_g$  のために  $u_g$  に  $\rho$  で重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する.

$$\begin{aligned} z_g &= F_g x_g, \quad (30) \\ F_g &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \\ z_1 &= \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_1 \ \theta_2] \\ z_2 &= \rho u_g \quad (31) \end{aligned}$$

最終的には制御対象と重み行列をまとめ, 一般化プラントを (32) 式のように構成する. これをブロック線図で表現したものが Fig.3 である. なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい [2].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix} \\ C_2 &= [C_g \ 0], \quad D_{21} = [W_w \ 0] \end{aligned}$$

ここで  $x := [x_g^T \ x_w^T]^T$ ,  $x_w$  は  $W_w(s)$  の状態で,  $x_w := [x_{w1} \ x_{w2} \ x_{w3} \ x_{w4}]^T$ . また  $w := [w_1^T \ w_2^T]^T$ ,  $z := [z_1^T \ z_2^T]^T$  と定義した.

本制御系設計での制御問題は以下で与えられる.

制御問題: 一般化プラント (32) に対して DIA 条件 (3) を達成する許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ.

### 4.2 $H_\infty$ DIA コントローラ

上記の制御問題に対する解を得るため, MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって以下の設計パラメータを選定した.

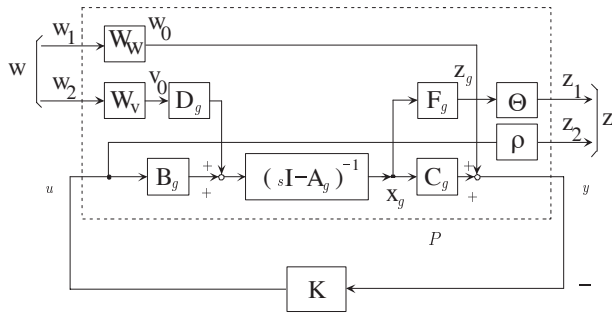


Fig. 3: Generalized Plant

$$\begin{aligned}
 W_v(s) &= \frac{2.0 \times 10^3}{s + 0.100} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad W_w = 0.50 \\
 \Theta &= \text{diag} [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2] \\
 \theta_1 &= \text{diag} [1.0 \quad 1.0] \\
 \theta_2 &= \text{diag} [0.0005 \quad 0.0005] \\
 \rho &= 1.0 \cdot 10^{-6} \cdot \text{diag} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (33)
 \end{aligned}$$

これによって、 $H_\infty$ DIA コントローラ  $K(s)$  が直接的に得られる。ここでコントローラ  $K(s)$  は 4 入力 4 出力で、次数は 16 次である。 $K(s)$  の周波数応答を Fig.4 に示す。このときの重み行列  $N$  の最大値は  $1.037282 \times 10^{-4} \times I$  である。ここで計算を簡単にするために  $N$  の自由度を

$$N = nI \quad (34)$$

と限定した。 $n$  は正のスカラで  $I$  は一般化プラントと等しい次数を持つ単位行列である。正定行列  $N$  をこのように限定するのは、解析後の評価を容易にするためである。

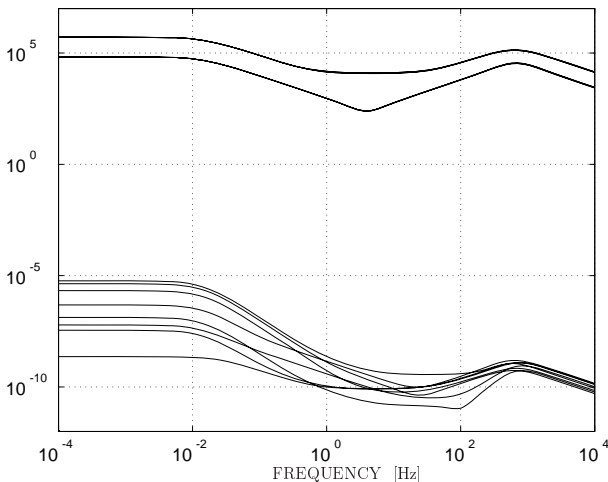


Fig. 4: Frequency Responses of  $H_\infty$ DIA Controllers

### 5 数値シミュレーションによる検証

前節で得られた  $H_\infty$ DIA コントローラ  $K(s)$  を用いてシミュレーションによる性能検証を行う。比較対象として積分型状態フィードバック制御による結果を示す。

まず入力  $u_{l1}$  に 0.1[mm] のステップ入力信号を加え応答波形を計算した。 $H_\infty$ DIA 制御の結果を Fig.5(a), 状態フィードバック制御の結果を Fig.6(a) に示す。この場合には状態フィードバック制御の方が良好な性能を示す。

次に、非零の未知の初期状態からの初期値応答を計算した。ここで初期状態として電流値が 0.1[A] 流れている状態を選定した。結果を Fig.5(b), 6(b) に示す。この結果より、不確かな初期状態に対する応答は  $H_\infty$ DIA 制御の方が良好であることが確認できる。

さらに、ステップ状外乱を加えたときの応答波形を測定した。ここでは 0.1[V] のステップ信号を外乱  $v_{L11}$  に加えた場合を計算する。結果を Fig.5(C), 6(c) に実線で示す。これより、 $H_\infty$ DIA 制御が外乱の影響を小さく抑えていることが分かる。

最後にコントローラのロバスト性能を比較するため電磁石の抵抗値がノミナル値 (4.0Ω) モデルから 1.8 倍 (7.2Ω) に変動した場合の、外乱応答を比較した。モデル変動後の  $H_\infty$ DIA 制御の外乱応答を Fig.5(c) に、状態フィードバック制御の外乱応答を Fig.6(c) にそれぞれ破線で示す。これより提案法ではモデル変動後も応答の劣化を抑えている。

以上理想的なステップ応答 (a) を除いて、 $H_\infty$ DIA 制御の応答が優れ、その有用性が確認出来た。

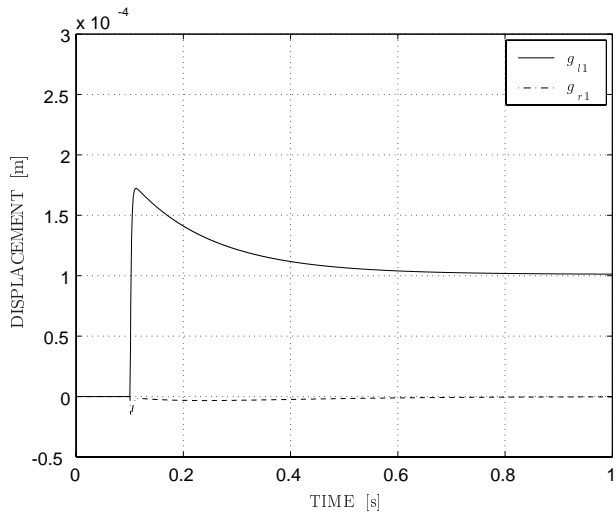
### 6 おわりに

本稿では外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$ DIA 制御問題を磁気軸受に適用し、良好な過渡応答特性を有する磁気軸受制御系を構成した。まず磁気軸受の数学モデルを作成し、 $H_\infty$ DIA 制御により制御系の設計を行った。得られた  $H_\infty$ DIA コントローラと積分型状態フィードバック制御を用いて数値シミュレーションを行うことにより、不確かな初期値に対する応答、ロバスト性の両面で提案法の有効性が確認された。

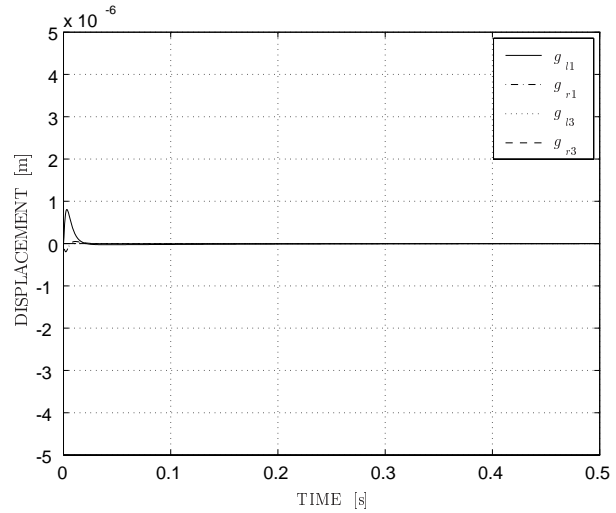
今後は制御実験により  $H_\infty$ DIA 制御の有効性を確認し、さらに回転速度変動に対して  $H_\infty$ DIA 制御を応用した切替制御の実現を目指す。

### 文 献

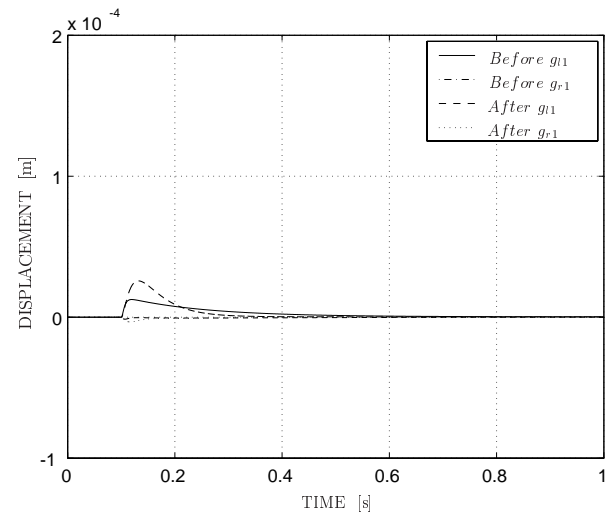
- [1] A. Kojima, M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura, "Linear Quadratic Differential Games and  $H_\infty$  Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -," *Trans. SICE*, vol. 28, no. 5, pp. 570 - 577, 1992.
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [3] T. Namerikawa, M. Fujita and R. S. Smith, " $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties : Evaluation by a Magnetic Suspension System", *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 87-92, 2001.
- [4] T. Namerikawa, M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, "A Generalized  $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties," *Proc. of American Control Conf.*, pp. 2204-2209, 2002.
- [5] 電気学会編, "磁気浮上と磁気軸受," コロナ社, 1993
- [6] 有我祐一, 野波健蔵, 酒井克章, "ゼロパワー磁気軸受系の非線形制御", 日本機械学会論文集 (C 編), 67 巻-654 号, pp.102-116, 2001
- [7] T. Namerikawa and M. Fujita, " $H_\infty$  Control System Design of the Magnetic Suspension System Considering Initial State Uncertainties," *IEEJ Trans. EIS*, Vol.123, No.6, pp.1094-1100, 2003



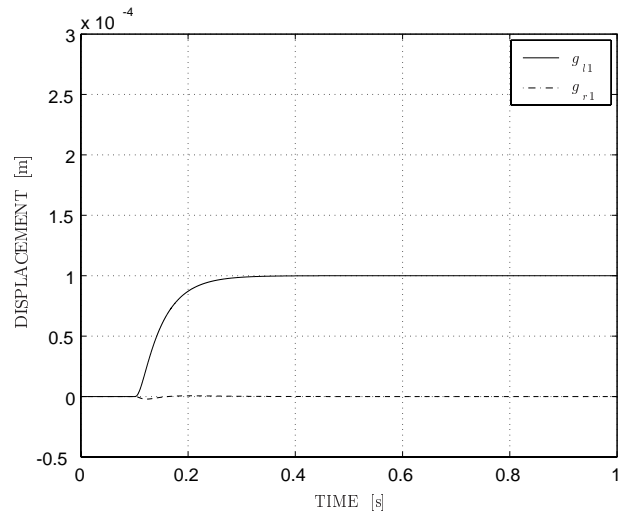
(a) Step Response



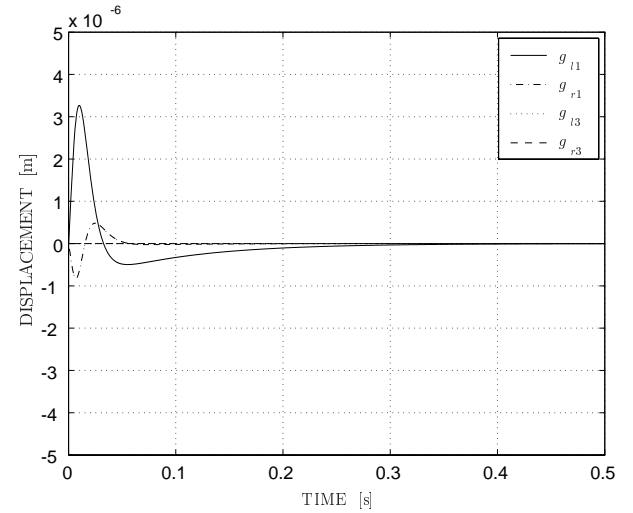
(b) Initial Response



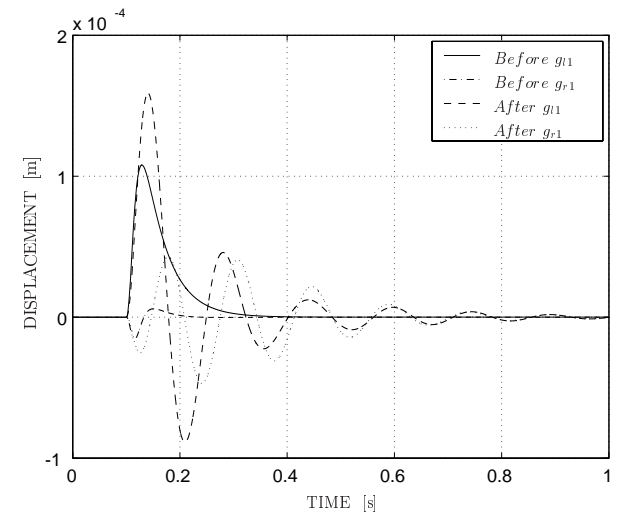
(c) Disturbance Response with/without perturbation



(a) Step Response



(b) Initial Response



(c) Disturbance Response with/without perturbation

Fig. 5:  $\mathcal{H}_\infty$  DIA Controller

Fig. 6: Integral State Feedback Controller