

# 初期状態の不確かさを考慮した $H_\infty$ DIA 制御系設計

滑川 徹 瀬戸 洋紀 (長岡技術科学大学)

## $H_\infty$ DIA Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties

Toru Namerikawa and Hiroki Seto (Nagaoka University of Technology)

### Abstract

This paper deals with a generalized  $H_\infty$  DIA control attenuating initial-state uncertainties. An  $H_\infty$  control problem, which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) control for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed DIA problem supplies  $H_\infty$  controls with good transients and assures  $H_\infty$  controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a necessary and sufficient condition of the generalized  $H_\infty$  DIA problem. Furthermore we apply this proposed method to a magnetic suspension system, and evaluate an attenuation property of the proposed generalized  $H_\infty$  DIA control approach via experiments.

キーワード:  $H_\infty$  制御, DIA 制御, ロバスト制御, 初期状態の不確かさ, 磁気浮上システム

(Keywords:  $H_\infty$  Control, DIA Control, Robust Control, Initial-State Uncertainties, Magnetic Suspension Systems)

### 1 はじめに

従来の  $H_\infty$  制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態はゼロと仮定して理論展開されてきたが, 実システムにおいては初期状態はゼロである保障がない. 初期状態がノンゼロである場合には  $H_\infty$  制御の過渡応答特性が劣化する場合がある. これに対して, 外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題 ( $H_\infty$  DIA 制御問題) は従来の外乱減衰特性のみを考慮した  $H_\infty$  制御に比べて良好な過渡特性を付加するものと思われる. 近年盛んに切替制御に関する研究が行なわれているが, このアプローチは切替補償器の有効な実装法と期待される.

外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御問題については, まず有限時間の場合の一般化  $H_\infty$  制御問題に対する解が得られ [1, 2], さらにこの問題は無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された [3, 2]. 文献 [3] で議論されているのは直交条件を含む制御対象に限定されていた [4, 5]. 実システムに本手法を応用するには, この条件は厳しいもので, 制御系設計の自由度がかなり制約を受け, 実用上十分でない [6]. そこで文献 [9] では従来の結果から直交条件を外して, 外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間  $H_\infty$  DIA 制御問題を定式化し, 可解条件の必要十分条件を導出し, また, 解の存在のための必要十分条件を導出するだけでなく, ある 1 つの具体的な制御方を提示した.

本稿では文献 [9] のアプローチを用いて, 磁気浮上システムに対して制御系設計を行い, 文献 [9] の特性を実験的に検証することを目的とする. 具体的には, 初期状態の不確かさ  $x_0(t=0)$  における状態  $x \neq 0$  に対する重み行列  $N$  と設計されたロバスト補償器の周波数特性を解析し, それらが制御実験に与える影響について検証と考察を行なう.

これにより, 外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御の有用性を確認する.

### 2 問題設定

時間区間  $[0, \infty)$  で定義される以下の線形時不変システムを考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} u \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in R^n$  は状態で  $x_0 = x(0)$  は初期状態;  $u \in R^r$  は制御入力;  $y \in R^m$  は観測出力;  $z \in R^q$  は被制御量;  $w \in R^p$  は外乱であり,  $w(t)$  は区間  $[0, \infty)$  において 2 乗可積分関数 ( $w \in L^2[0, \infty)$ ) とする.

一般性を失うことなく  $x_0$  は初期状態の不確かさとして扱うことが出来,  $x_0 = 0$  を既知の初期状態とすることが出来る.

またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく [5].

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$  は適当な次元を有する定数行列であり, 以下の条件を満たすものとする.

- $(A, B_1)$ : 可制御       $(A, C_1)$ : 可観測
- $(A, B_2)$ : 可制御       $(A, C_2)$ : 可観測
- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$ : 正則
- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$ : 正則

システム (1) に対して, すべての許容制御則  $u(t)$  が以下の線形時不変システムで与えられ, (1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする.

$$\begin{aligned} u &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\zeta(t)$  はコントローラの状態であり、有限の次元を持つ。また  $J, K, G, H$  は適切な次元を持つ定数行列である。

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の  $H_\infty$  DIA 制御問題を考える。

### 問題 1 $H_\infty$ DIA 制御問題

$N > 0$  が与えられたときに、すべての  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $H_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。

初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す。行列不等式の意味でより大きな  $N$  を選ぶことは、初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する。

### 3 $H_\infty$ DIA 制御

定義により、DIA 制御は初期状態が既知である場合 ( $x_0 = 0$ ) にはある  $H_\infty$  制御になる。このことにより DIA 制御もそれに類似した制御則の構造を持つものと考えられる。そこで問題を解くために、以下の所謂 2-Riccati 条件を考える。

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で、解  $M > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} & M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ & + (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ & - M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ & + C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで以下の行列

$$\begin{aligned} & A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 \\ & - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M \end{aligned} \quad (5)$$

は安定である。

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で、解  $P > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ & + P(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ & - P(C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ & + B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで以下の行列

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1 \end{aligned} \quad (7)$$

は安定である。

(A3)  $\rho(PM) < 1$

ここで  $\rho(X)$  は行列  $X$  のスペクトル半径を表し、 $\rho(X) = \max |\lambda_i(X)|$  である。

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる。

補題 1 [9] システム (1) に対して、仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする。このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラはすべての外乱  $\forall w \in L^2[0, \infty)$  とすべての初期状態  $\forall x_0 \in R^n$  (ただし、 $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0 \quad (8)$$

を満たす。

ここで  $H_\infty$  セントラルコントローラは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \\ \dot{\zeta} &= A\zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ &\quad + (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

明らかに、この補題は (A2) の Riccati 解  $P$  に関するものであり、 $N$  に関する条件になっていない。つまり不等式 (8) は一般には不等式 (3) を満足しなく、ここでの結論は DIA 制御問題に対する解ではない。そこでつぎに以下の不等式を考えてみる。

$$(A4) \quad N < P, \quad (N^{-1} > P^{-1}).$$

もし仮定 (A4) が満たされるならば、不等式 (8) により、明らかに不等式 (3) が成り立つ。つまりセントラルコントローラ (9) が DIA 制御となる。

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (10)$$

$N$  は初期状態の不確かさの指標として扱うことが出来る (例えば分散行列) ため、もし初期状態の不確かさが十分に小さいならば、つまり (A4) が満たされるならば、セントラルコントローラは初期状態の不確かさに対してロバスト性を有することになる。

上記の議論により、仮定 (A4) はセントラルコントローラが DIA 制御であるための必要条件のようにも見えるが、それは正しくない。真の必要十分条件を示すことによってこの事実を明らかにする。結果を述べるために以下の仮定を導入する。

$$(A5) \quad Q + N^{-1} - P^{-1} > 0,$$

ここで  $Q$  は以下の Riccati 方程式の最大解である。

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1} \\ & + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1} Q \\ & - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & \quad \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ & = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $L := (I - PM)^{-1}$ 。

定理 1 [9] システム (1) に対して、仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする。このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラ (9) が DIA 制御であるための必要十分条件は条件 (A5) を満たすことである。

#### 4 システムの記述とモデリング

磁気浮上システムは磁性体を非接触で空中に支持するシステムであり、磁気浮上列車（搬送車）、磁気軸受、など様々な産業分野に応用されている。

##### 4.1 システム構成

実験装置を Fig.1 に、またモデリングのための磁気浮上システムの構成図を Fig.2 に示す。電磁石が実験装置の上部に設置されており、制御目的は電磁力を制御することにより浮上体（鉄球）を空中に安定に非接触支持することである。本システムは本質的に不安定であり、フィードバック制御による安定化が必要である。ここで浮上体の質量  $M$  は 286[g] であり、定常浮上位置（ギャップ長） $X$  は 3[mm] と設定している。

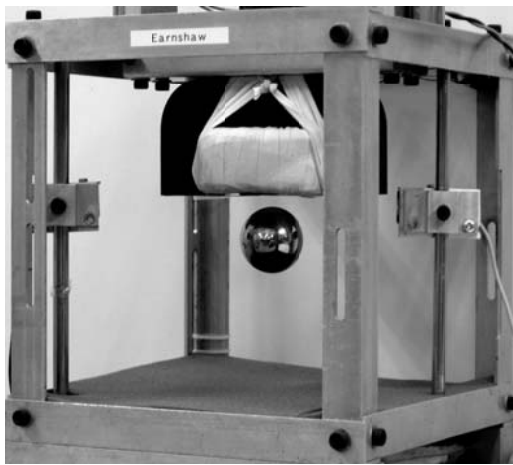


Fig. 1: Experimental Setup

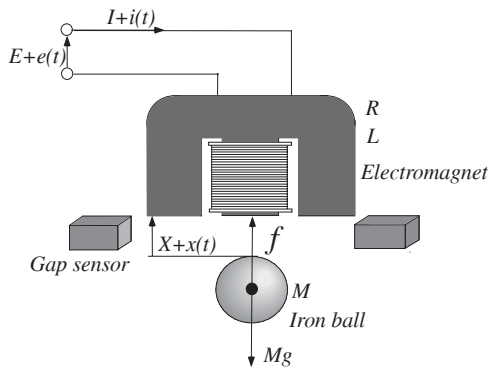


Fig. 2: Magnetic Suspension System

##### 4.2 数学モデル

定常状態での妥当な仮定 [ 8 ] のもとで、このシステムは以下の 3 つの浮上体の運動方程式 ((12) 式)、電磁力方程式 ((13) 式)、電気回路方程式 ((14) 式) で記述することが出来る。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Mg - f + v_m(t) \quad (12)$$

$$f(t) = k \left( \frac{I + i(t)}{X + x(t) + x_0} \right)^2 \quad (13)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R(I + i(t)) = E + e(t) + v_L(t) \quad (14)$$

ここで  $M$  : 浮上体（鉄球）の質量,  $X$  : 電磁石と浮上体との間の定常ギャップ,  $x(t)$  : 定常ギャップ  $X$  の微小変位,  $I$  : 定常電流,  $i(t)$  : 定常電流  $I$  からの微小変位,  $E$  : 定常電圧,  $e(t)$  : 定常電圧  $E$  からの微小変位,  $f(t)$  : 電磁石力,  $k, x_0$  : 同定実験によって決まる電磁石力  $f(t)$  の係数,  $L$  : 電磁石のインダクタンス,  $R$  : 電磁石の抵抗,  $v_m(t), v_L(t)$  : 外乱, ノイズ, である。

制御対象の物理パラメータを Table 1 にまとめる。

つぎに電磁力  $f(t)$  ((13) 式) を定常動作点付近でテイラー展開によって 1 次項までに近似すると以下が得られる。

$$f(t) = k \left( \frac{I}{X + x_0} \right)^2 - K_x x(t) + K_i i(t), \quad (15)$$

ここで  $K_x = 2kI^2/(X + x_0)^3$ ,  $K_i = 2kI/(X + x_0)^2$ 。

また観測出力  $y_g(t)$  はギャップセンサによって得られる浮上体の位置情報  $x(t)$  とする。

$$y_g(t) = x(t) + w_0(t) \quad (16)$$

ここで  $w_0(t)$  はセンサノイズやモデルの不確かさの影響を表す。上記を全てまとめると以下の状態方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \end{aligned} \quad (17)$$

ここで  $x_g := [x \ \dot{x} \ i]^T$ ,  $u_g := e$ ,  $v_0 := [v_m \ v_L]^T$ ,

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2670 & 0 & -23.3 \\ 0 & 0 & -31.6 \end{bmatrix}, \quad B_g = [0 \ 0 \ 3.33]^T$$

$$C_g = [1 \ 0 \ 0], \quad D_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.50 & 0 \\ 0 & 3.33 \end{bmatrix}$$

ここで  $(A_g, B_g)$  および  $(A_g, D_g)$  は可制御, また  $(A_g, C_g)$  は可観測である。

Table 1: Physical Model Parameters

Symbol	Parameter Name	Value	Unit
$M$	Mass of the ball	0.286	kg
$X$	Steady Gap	$3.000 \times 10^{-3}$	m
$I$	Steady Current	0.843	A
$E$	Steady Voltage	8.47	V
$k$	coefficient of $f$	$2.14 \times 10^{-4}$	Nm <sup>2</sup> /A <sup>2</sup>
$x_0$	coefficient of $f$	$4.36 \times 10^{-3}$	m
$R$	Resistance	9.50	$\Omega$
$L$	Inductance	0.300	H

#### 5 制御系設計

本節では得られた提案法と磁気浮上システムの線形状態空間表現を用い、磁気浮上システムに対して制御系を設計する。

### 5.1 一般化プラントの構成と問題設定

前節で導出したように磁気浮上システムの状態空間表現は (17) で与えられる [6,7]. これに対して一般化プラントを構成する.

まずシステム外乱  $v_0(t)$  と  $w_0(t)$  に関して考察する.  $v_0$  は入力への外乱で, 低周波帯域で影響を及ぼす. また  $w_0$  は出力外乱, およびモデルの不確かさを表す. そこで重み関数  $W_v$  および  $W_w$  を導入し  $v_0, w_0$  を以下のように表す.

$$v_0 = W_v(s) w_2 \quad (18)$$

$$W_v = \Phi C_w (sI - A_w)^{-1} B_w, \quad \Phi = [1 \quad 1]^T$$

$$w_0 = W_w w_1 \quad (19)$$

つぎに被制御変数について考慮する. 本研究では第1目的が浮上体の非接触安定支持であるため, 被制御量としてギャップ長  $x(t)$  とその微分値  $\dot{x}(t)$  を選ぶ. これらの状態変数に, レギュレーションのために重み付けし, 被制御量  $z_1$  を以下のように定義する. 同様に制御入力のレギュレーションのために  $u_g$  に重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する.

$$z_g = F_g x_g, \quad F_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \Theta z_g, & \Theta &= \text{diag} [\theta_1 \quad \theta_2] \\ z_2 &= \rho u_g \end{aligned} \quad (21)$$

ここで  $\Theta$  は被制御変数  $z_g$  に対する重み行列,  $\rho$  は制御入力  $u_g$  に対する重み係数である.

最終的には制御対象と重み行列をまとめ, 一般化プラントを (22) のように構成する. なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい [5].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} C_g & 0 \end{bmatrix}, & D_{21} &= \begin{bmatrix} W_w & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで  $x := [x_g^T \quad x_w^T]^T$  であり,  $x_w$  は  $W_v(s)$  の状態である. また  $w, z$  を,  $w := [w_1^T \quad w_2^T]^T, z := [z_1^T \quad z_2^T]^T$  と構成した.

この一般化プラントのブロック線図は Fig.3 で表される. ただし, ここで未構成のコントローラ  $K(s)$  が含まれている.

外乱  $v$  と  $w$  が様々なモデルの不確かさを表現しており, これらの外乱から出力  $z$  への影響が抑制されることが期待される. またさらに本稿での主課題である初期状態  $x(0)$  の不確かさが出力  $z$  へ及ぼす影響を減衰させたい.

そこで, 得られた一般化プラントに対して, 本制御系設計での制御問題は以下で与えられる.

制御問題: DIA 条件 (3) を達成する, 外乱と初期状態の不確かさの影響を減衰させる, 許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ.

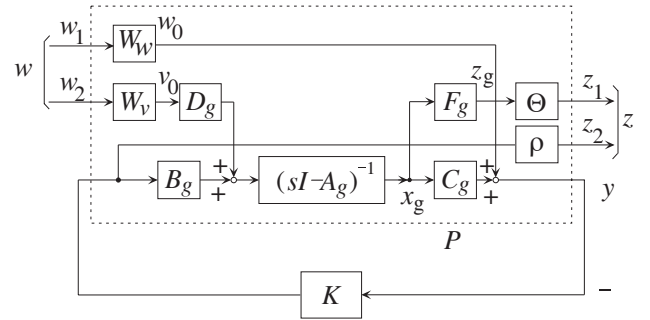


Fig. 3: Generalized Plant

### 5.2 設計手順

上記の制御問題に対する解を得るため, 前節で導出した一般化プラントに対して, 制御目的を達成するコントローラを設計する.

具体的には MATLAB 上で制御系設計に関して繰り返し計算を行なうことによって設計パラメータ;  $W_v(s), W_w, \Theta, \rho$  を適切に選定し, 直接的に  $H_\infty$  DIA コントローラ  $K(s)$  の数値解を求める. その際の手順を以下に示す.

[Step 1] 周波数重み関数  $W_v(s)$  を選定する.  $W_v(s)$  は低周波帯域で比較的大きなゲインを持つ関数として選ぶ. コントローラの低周波ゲインと相関がある.

[Step 2] 重み関数  $W_w$  を選定する.  $W_w$  は不確かさの大きさと相関があり, これを大きく選ぶことは不確かさを許容することになる.

[Step 3] 重み行列  $\Theta$  を選定する.  $\Theta$  は被制御量  $z_g$  に対する重み行列で, 被制御量のレギュレーションの役割を果たす.

[Step 4] 重み係数  $\rho$  を選定する.  $\rho$  は入力  $u_g$  に対する重み行列で, 入力のレギュレーションの役割を果たす.

[Step 5] 一般化プラントの構成: [Step 1] ~ [Step 4] で選定した設計パラメータを用いて一般化プラントを構成する. この情報を基に  $H_\infty$  DIA 制御器  $K$  が計算される.

[Step 6] 最大の行列  $N$  の計算:

条件 (A4) を満たすような最大の行列 (行列不等式の意味で)  $N$  を計算する. ここで計算の簡単のために  $N$  の自由度を

$$N = nI \quad (23)$$

と限定する. ただしここで,  $n$  は正のスカラーで  $I$  は一般化プラントと等しい次数を持つ単位行列とする<sup>1</sup>.

### 5.3 $H_\infty$ DIA コントローラ

MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによってまず以下の設計パラメータを選定した<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} W_v(s) &= \frac{2.0 \times 10^4}{s + 0.010} \\ W_w &= 0.40 \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.10 & 0 \\ 0 & 0.00010 \end{bmatrix} \\ \rho &= 1.0 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (24)$$

<sup>1</sup> 正定行列  $N$  をこのように限定するのは, 解析後の評価を容易にするという理由が大きい

<sup>2</sup>  $W_w$  は周波数関数と選ぶことも出来るがここでは簡単のため定数とした.



これによって、コントローラ  $K_{DIA1}$  が直接的に得られる。ここでコントローラの次数は 4 次である<sup>3</sup>。  $K(s)$  の周波数応答を Fig.4 に実線で示す。またこのときの重み行列  $N$  の最大値は  $5.256980 \times 10^{-3} \times I_4$  である。これらより  $K(s)$  は低周波帯域でハイゲインを有し、また高周波帯域で良好なロールオフ特性を有するという PID 補償を改善した応答を示している。従来の DIA 制御の設計の枠組みではコントローラに積分特性を持たせることが困難であった [3,6]。

#### 5.4 重み行列 $N$ の役割に関する検討

不確かな初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの抑制と外乱の抑制の相対的な重要性の指標と成り得る。 $N$  を大きく選ぶことは行列不等式の意味で初期状態の不確かさの影響をより抑制する許容コントローラを選ぶという意味を持つ(ただしここではスカラー  $n$  として扱う)。初期状態の不確かさの影響をより抑制する、ということにより、過渡応答性能が向上することが期待される [2]。

重み行列  $N$  に対するフィードバック性能の検証のため、前節の設計パラメータを変更し、別の  $H_\infty$  DIA コントローラを設計した。ここでは状態  $x_g$  のレギュレーションに重要な役割を果たすパラメータ  $\Theta$  に着目し、中でも特に状態  $x_g$  の中で、浮上体の位置に対する重み係数である  $\theta_1$  を変更し、それに伴う 4 つのコントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  を設計した<sup>4</sup>。ここで比較のため、その他の設計パラメータ  $W_v(s)$ ,  $W_w$ ,  $\theta_2$ ,  $\rho$  は同一のものを用いた。

この結果を Table 2 に示す。また得られた 4 つのコントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の周波数応答を Fig.4 にそれぞれ実線、鎖線、一点鎖線、点線で示す。Fig. 4 と Table 2 より、重み係数  $\theta_1$  が大きい程、コントローラの高周波ゲインが大きく、それに伴い、 $n$  の値が大きい傾向があることが分かる。

(注意 1):  $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 > 1.1$ ) と選ぶと後述する制御実験において応答が振動的になり、更に大きくすると制御系が安定性を失う。

(注意 2):  $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 < 0.3$ ) と選ぶと Fig.4 におけるコントローラの周波数応答は高周波領域だけでなく、全周波数帯域でゲインが下がる。その結果、後述する制御実験において、( $0.3 \leq \theta_1 \leq 1.1$ ) における特性、傾向と異なる性質を示す。

Table 2:  $H_\infty$  DIA Controllers and their properties

Controller	$\theta_1$	$n$	Line style in Fig.4
$K_{DIA1}$	1.10	$5.256980 \times 10^{-3}$	solid line
$K_{DIA2}$	0.80	$5.223575 \times 10^{-3}$	dashed line
$K_{DIA3}$	0.50	$5.202185 \times 10^{-3}$	dash-dot line
$K_{DIA4}$	0.30	$5.193773 \times 10^{-3}$	dotted line

## 6 制御実験による検証と考察

### 6.1 制御実験

得られた 4 つのコントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の特性を検証するために磁気浮上システムを用いて制御実験を行った。

まず 4 つのどのコントローラを用いても制御系は安定性を良好に保持した。つぎに本稿での目的である過渡応答性能(初

<sup>3</sup>制御対象の次数は 3 次であり、比較的低位のコントローラである。

<sup>4</sup> $K_{DIA1}$  に関する情報は (40) 式と重複する。

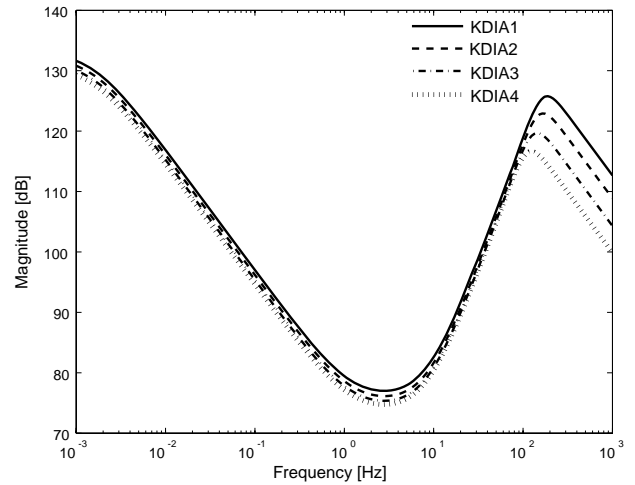


Fig. 4: Frequency Responses of DIA Controllers

期状態の不確かさに対する応答)を確認するためにステップ状の目標値信号を与え、応答を確認した。ここでステップ信号の大きさは 1[mm] とした<sup>5</sup>。実験結果を Fig.5 にそれぞれ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の順に上から示す。4 つの応答では、整定時間がほぼ同じであるが、オーバーシュートの大きさがそれぞれ異なる。これより、 $n$  が大きい程、オーバーシュートが小さく抑えられていることが分かる。

さらに、目標値応答だけではなく、制御系の総合的な評価のため、4 つのコントローラを用いて外乱応答を計測した。その結果を Fig.6 に示す。これは定常吸引力の約 25[%] に相当する 0.7[N] 相当の擬似力外乱を鉛直下向きに加えた結果である。4 つのコントローラの外乱除去特性がほぼ同等であることが確認できる<sup>6</sup>。

(注意 3): 外乱を定常吸引力の 50[%] 相当、100[%] 相当の鉛直下向き擬似力外乱を加えても制御系は安定性を失うことなく、良好な特性を示した。そのときに外乱応答は Fig.7 のほぼ相似形となる<sup>7</sup>。

### 6.2 検証と考察

前節の制御実験により、重み行列  $N$  が制御系の過渡応答の評価指標として有用であることが実験的に確認できた。ただし、制御実験に対して以下の点に注意する必要がある。

(注意 4): (注意 1), (注意 2) と関連して、 $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 > 1.1$ )、もしくは ( $\theta_1 < 0.3$ ) とした場合にはこのような綺麗な目標値応答の変化特性は得られない。

(注意 5): ここでは実験結果を省略するが、設計パラメータ  $\rho$  を変化させると制御入力  $u$  へのレギュレーションの効果が変化して目標値応答も変化し、応答を改善させることも可能である。ただし、 $\rho$  の変化は一般化プラントの  $D_{12}$  行列に反映されるため、(5) 式のリカッチ解  $M$  のみに影響を及ぼす。つまり  $\rho$  を変化させても (7) 式の  $P$ , (16) 式の  $Q$  は不変で、その結果  $N$  は変わらない。

<sup>5</sup>定常ギャップ長は 3[mm] である

<sup>6</sup>僅かに目標値応答 (Fig.5) と同様な特性が見られる。

<sup>7</sup>100[%] より大きな外乱はハードウェアの制約から印加することが出来ない。

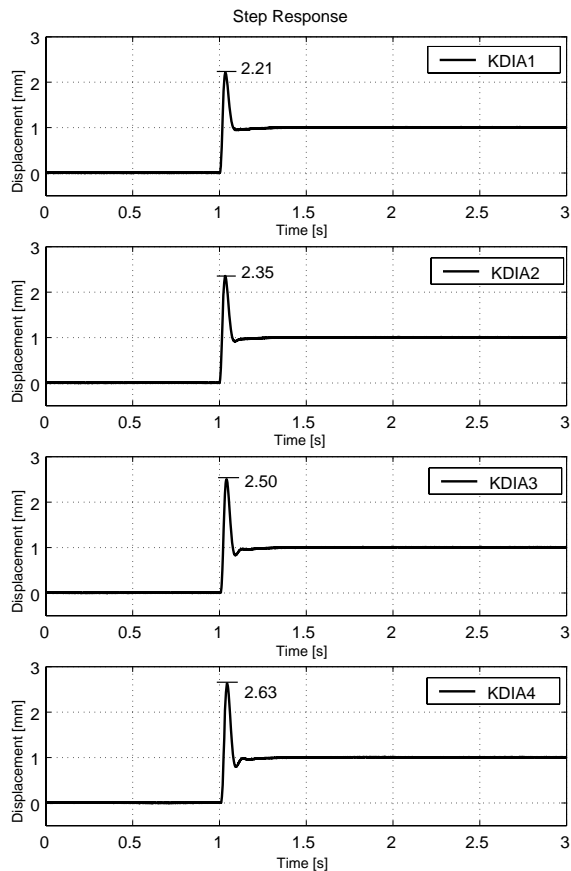


Fig. 5: Step Responses

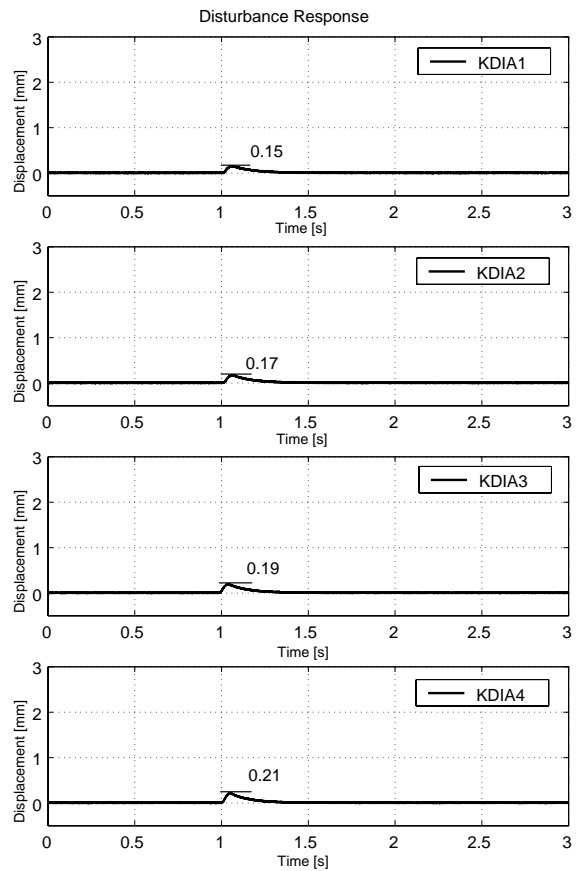


Fig. 6: Disturbance Responses

(注意 6): Fig.5 の目標値応答では全体的にオーバーシュートが大きいのと考えられる。これは重み関数  $W_v(s)$ ,  $W_w(s)$  の次数を上げ、それによりコントローラの次数を上げることで改善できると思われる。

## 7 おわりに

本論文では無限時間区間における外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御問題を直交条件を課さない場合について定式化し、その問題に対して解を与えている。

またこの結果を用いて磁気浮上システムに対して制御系設計を行い、制御実験により、理論検証を行なった。具体的には、状態量のレギュレーションに関わるパラメータ ( $\theta_1$ ) と DIA 制御での重み  $N$  との相関について調べ、さらに重み  $N$  と過渡応答特性との関係を明らかにした。

これにより、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御の有用性を確認した。

## 文 献

- [1] K. Uchida and M. Fujita, "Controllers Attenuating Disturbance and Initial-Uncertainties for Time-Varying Systems," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 156, Springer-Verlag, pp. 187 - 196, 1991.
- [2] P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal and K. R. Poolla, " $H_\infty$  Control with Transient," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, pp. 1373 - 1393, 1991.
- [3] K. Uchida and A. Kojima and M. Fujita, " $H_\infty$  control attenuating initial-state uncertainties," *Int. J. of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 245 - 252, 1997.
- [4] A. Kojima, M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura, "Linear Quadratic Differential Games and  $H_\infty$  Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -," *Trans. SICE*, vol. 28, no. 5, pp. 570 - 577, 1992.
- [5] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [6] T. Namerikawa, M. Fujita and R. S. Smith, " $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties : Evaluation by a Magnetic Suspension System", *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 87-92, 2001.
- [7] T. Namerikawa and M. Fujita, "Uncertain Structure and  $\mu$ -Synthesis of a Magnetic Suspension System," *Trans. IEE of Japan*, vol. 121-C, no. 6, pp. 1080-1087, 2001.
- [8] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K. Uchida, " $\mu$ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 530-536, 1995.
- [9] T. Namerikawa, M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, "A Generalized  $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties," *Proc. of American Control Conf.*, pp. 2204-2209, 2002.