初期状態の不確かさを考慮した H_∞DIA 制御について

H_∞ DIA Control Attenuating Initial State Uncertainties

滑　川　　徹　（長岡技術科学大学）
Toru Namerikawa (Nagaoka University of Technology)

1　はじめに

従来の H_∞ 制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態は零と仮定して理論展開されてきたが，実際に実システムにおいては初期状態は不確かで零である保障がない．初期状態が非零である場合には，非零の初期状態の影響で H_∞ 制御の過渡応答特性が劣化する．これに対して，外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ 制御問題は従来の外乱減衰特性のみを考慮した H_∞ 制御に比べ良好な過渡特性を付加する．この問題については，まず有限時間の場合の一般化 H_∞ 制御問題に対する解が得られ［1,2］，さらに無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された［2,3］．しかし文献［3］で議論されているシステムは直交条件を含むものに限定されており，これは実システムに本手法を応用するには厳しい条件で，制御系設計の自由度が制約を受ける．本稿では従来の結果から直交条件を外して，外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間 H_∞DIA 制御問題を定式化し，解の存在のための必要十分条件を導出するとともに，ある１つの厳密解を導出する．

2　問題設定

時間区間 $[0,\infty)$ で定義される直交条件を有しない以下の線形時不変システムを考える．

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax+B_1w+B_2u, \quad x(0)=x_0 \\ z & = & C_1x+D_{12}u \\ y & = & C_2x+D_{21}w \end{array} \tag{1}$$

ここで $x\in R^n$ は状態で $x_0=x(0)$ は初期状態; $u\in R^r$ は制御入力; $y\in R^m$ は観測出力; $z\in R^q$ は被制御量; $w\in R^p$ は外乱であり，$w(t)$ は区間 $[0,\infty)$ において２乗可積分な関数 ($w\in L^2[0,\infty)$) とする．$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ は適当な次元を有する定数行列であり，(A,B_1):可制御，(A,C_1):可観測 (A,B_2):可制御，(A,C_2):可観測 $D_{12}^TD_{12}\in R^{r\times r}$:正則，$D_{21}D_{21}^T\in R^{m\times m}$:正則，とする．

いまシステム (1) に対して, すべての許容制御則 $u(t)$ が以下の線形時不変システムで与えられ，(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする．

$$\begin{array}{rcl} u & = & J\zeta+Ky \\ \dot{\zeta} & = & G\zeta+Hy, \quad \zeta(0)=0 \end{array} \tag{2}$$

ここで $\zeta(t)$ はコントローラの状態であり，有限の次元を持つ．また G, H, J, K は適切な次元を持つ定数行列である．

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して，以下の混合減衰 H_∞DIA 制御問題を考える．

問題 1 混合減衰 H_∞DIA 制御問題
$N>0$ が与えられたときに, すべての外乱 $w\in L^2[0,\infty)$ とすべての制御対象の初期状態 $x_0\in R^n$（ただし $(w,x_0)\neq 0$）に対して被制御量 z が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを減衰させる許容制御則を見つけよ．

$$\|z\|_2^2<\|w\|_2^2+x_0^TN^{-1}x_0$$

上記の条件を満たす許容制御則を H_∞ DIA 制御 (または単に DIA 制御)（**D**isturbance and **I**nitial state uncertainty **A**ttenuation (DIA) control）と呼ぶ．

3　外乱と初期状態の混合減衰 H_∞DIA 制御

前節で定義した制御問題に関して解の導出と行なう．そこで問題を解くために，以下の所謂 2-Riccati 条件を考える．

(A1)　以下の Riccati 方程式が可解で，解 $M>0$ が存在する．

$$\begin{array}{l} M(A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}D_{12}^TC_1) \\ +(A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}D_{12}^TC_1)^TM \\ -M(B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^T-B_1B_1^T)M \\ +C_1^TC_1-C_1^TD_{12}(D_{12}^TD_{12})^{-1}D_{12}^TC_1=0 \end{array} \tag{3}$$

ここで行列 $A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}D_{12}^TC_1-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TM+B_1B_1^TM$ は安定である．

(A2)　以下の Riccati 方程式が可解で，解 $P>0$ が存在する．

$$\begin{array}{l} (A-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2)P \\ +P(A-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2)^T \\ -P(C_2^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2-C_1^TC_1)P \\ +B_1B_1^T-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}D_{21}B_1^T=0 \end{array} \tag{4}$$

ここで行列 $A-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2-PC_2^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2+PC_1^TC_1$ は安定である．

(A3)　$\rho(PM)<1$
ここで $\rho(X)$ は行列 X のスペクトル半径を表し，$\rho(X)=\max|\lambda_i(X)|$ である．

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる．

定理 1 システム (1) に対して，仮定 **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** が成り立つものとする．このとき H_∞ セントラルコントローラ (5) が DIA 制御であるための必要十分条件は以下の **DIA condition** を満たすことである．

$$\begin{array}{rcl} u & = & -(D_{12}^TD_{12})^{-1}(B_2^TM+D_{12}^TC_1)(I-PM)^{-1}\zeta \\ \dot{\zeta} & = & A\zeta+B_2u+PC_1^T(C_1\zeta+D_{12}u) \\ & & +(PC_2^T+B_1D_{21}^T)(D_{21}D_{21}^T)^{-1}(y-C_2\zeta) \\ \zeta(0) & = & 0 \end{array} \tag{5}$$

DIA condition:　$Q+N^{-1}-P^{-1}>0,$

ここで Q は以下の Riccati 方程式の最大解であり，$L:=(I-PM)^{-1}$ としている．

$$\begin{array}{l} Q(A-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2 \\ \quad +(B_1B_1^T-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}D_{21}B_1^T)P^{-1}) \\ \quad +(A-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}C_2 \\ \quad +(B_1B_1^T-B_1D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}D_{21}B_1^T)P^{-1})^TQ \\ \quad -Q(B_1^T-D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}(C_2P+D_{21}B_1^T)L)^T \\ \quad \times(B_1^T-D_{21}^T(D_{21}D_{21}^T)^{-1}(C_2P+D_{21}B_1^T)L)Q=0 \end{array} \tag{6}$$

証明: 省略

4　おわりに

本論文では無限時間区間における外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞DIA 制御問題を直交条件を課さない場合について定式化し，その問題に対して可解性の必要十分条件とともに解の構成法の一つを示した．得られた解は複雑な式展開を必要とするものの，従来結果の自然な拡張になっている．

参　考　文　献

［1］ K. Uchida and M. Fujita, “Controllers Attenuating Disturbance and Initial-Uncertainties for Time-Varying Systems,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 156, Springer-Verlag, pp. 187 - 196, 1991.

［2］ P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal and K. R. Poolla, “H_∞ Control with Transient,” *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, pp. 1373 - 1393, 1991.

［3］ K. Uchida and A. Kojima and M. Fujita, “H_∞ control attenuating initial-state uncertainties,” *Int. J. of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 245 - 252, 1997.