

# 初期状態の不確かさを考慮した $H_\infty$ 制御に関する考察

## $H_\infty$ Control Attenuating Initial State Uncertainties

正 滑川 徹 (長岡技科大)

Toru NAMERIKAWA, Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata

This paper deals with a generalized  $H_\infty$  control attenuating initial-state uncertainties. An  $H_\infty$  control problem, which treats a mixed attenuation of disturbance and initial-state uncertainty for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed attenuation supplies  $H_\infty$  controls with good transients and assures  $H_\infty$  controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a necessary and sufficient condition of the generalized mixed attenuation problem. Furthermore we apply this proposed method to a magnetic suspension system, and evaluate an attenuation property of the proposed generalized mixed attenuation  $H_\infty$  control approach.

**Keywords:**  $H_\infty$  Control, DIA Control, Initial-State Uncertainties, Magnetic Suspension Systems

### A1. はじめに

従来の  $H_\infty$  制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態は零と仮定して理論展開されてきたが、実際に実システムにおいては初期状態は不確かかで零である保障がない。初期状態が非零である場合には、非零の初期状態の影響で  $H_\infty$  制御の過渡応答特性が劣化する場合がある。これに対して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題は従来の外乱減衰特性のみを考慮した  $H_\infty$  制御に比べて良好な過渡特性を付加するものと思われる。まず有限時間の場合の一般化  $H_\infty$  制御問題に対する解が得られ [1, 2], さらにこの問題は無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された [3, 2]。文献 [3] で議論されているシステムは直交条件を含むものに限定されていた [4, 5] が、実システムに本手法を応用するには、この条件は厳しいもので、制御系設計の自由度がかなり制約を受ける。本稿では従来の結果から直交条件を外して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間  $H_\infty$  制御問題を定式化し、解の存在のための必要十分条件を導出する。また、解の存在のための必要十分条件を導出するだけでなく、ある 1 つの厳密解も導出した。さらに提案手法を磁気浮上システムに適用し、従来法 [6] と比較することにより提案手法の有効性を検証する。

### A2. 問題設定

本論文で扱うシステムは時間区間  $[0, \infty)$  で定義される、直交条件を有しない線形時不変システムとする。そのシステムに対して本節では補償器を含めた閉ループ系に対して、制御問題を以下のように定式化する。

#### 問題 1 DIA 制御問題

$N > 0$  が与えられたときに、すべての外乱  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての制御対象の初期状態  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して被制御量  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $H_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。

### A3. 外乱と初期状態の混合減衰 $H_\infty$ 制御 (DIA 制御)

前節で定義した制御問題に関して解の導出と行なう。主結果である定理 1 の導出のための準備となる補題 1 を導出し、これにより、DIA 制御と従来の  $H_\infty$  制御との関連を考察する。補題 1 を発展させることにより、 $H_\infty$  セントラルコントローラ (10) が DIA 制御であるための必要十分条件を与える定理 1 を得る。

### A4. 定理 1 の証明

本節では定理 1 の証明を行なうが、その際に補題 2 と補題 3 を示すことにより定理 1 を示す。

### A5. 磁気浮上システムへの応用

得られた提案手法を磁気浮上システムへ応用する。磁気浮上システムの数学モデルを導出し、設計目的から一般化プラントを構成する。得られた一般化プラントに対して提案手法を適用し、提案法の有効性を検証する。本制御系設計での制御問題は以下で与えられる。

制御問題:  $H_\infty$  DIA 条件 (3) を達成するような外乱と初期状態の不確かさの影響を減衰させる、許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ。

MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって設計パラメータを適切に選定し、 $H_\infty$  DIA コントローラ  $K(s)$  の厳密解を直接的に求めた。得られたコントローラを用いて数値シミュレーションにより従来法と比較し、その特性を検証した。

### A6. おわりに

本論文では無限時間区間における外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題を直交条件を課さない場合について定式化し、その問題に対して解を与えている。得られた解は従来結果の自然な拡張になっているものの、複雑な式展開を必要とする [3, 6]。具体的には混合減衰  $H_\infty$  制御問題に対して可解条件の必要十分条件を導出し、さらに解の構成法の一つを示した。

また得られた外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  コントローラを磁気浮上システムに適用し、従来の  $H_\infty$  コントローラ、また過去の  $H_\infty$  DIA コントローラ [6] と比較することにより、提案法の特性を検証し、有効性を確認した。

## 1 はじめに

従来の  $H_\infty$  制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態はゼロと仮定して理論展開されてきたが、実際に実システムにおいては初期状態は不確かでゼロである保障がない。初期状態が非零である場合には、非零の初期状態の影響で  $H_\infty$  制御の過渡応答特性が劣化する場合がある。

これに対して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題は従来の外乱減衰特性のみを考慮した  $H_\infty$  制御に比べて良好な過渡特性を付加するものと思われる。制御工学の分野で近年盛んにハイブリッド制御や切替制御に関する研究が行なわれているが、この問題は切替補償器の実装法として有効であることが期待される。

外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題については、まず有限時間の場合の一般化  $H_\infty$  制御問題に対する解が得られ [1,2]、さらにこの問題は無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された [3,2]。

文献 [3] で議論されているのは直交条件を含む制御対象に限定されていた [4,5]。実システムに本手法を応用するには、この条件は厳しいもので、制御系設計の自由度がかなり制約を受ける。無限時間区間における初期状態の不確かさと外乱の混合減衰問題では、従来の方法では実用上十分でない [6]。なぜなら直交条件を満たす線形時不変システムは制御系設計の際の自由度の制約が大きく、結果的に制御入力のリギュレーションが困難となるからである [6]。

本稿では従来の結果から直交条件を外して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間  $H_\infty$  制御問題を定式化し、可解条件の必要十分条件を導出する。解は文献 [4] の結果の自然な拡張であるが、複雑な式展開を要する [3,6]。また、解の存在のための必要十分条件を導出するだけでなく、ある1つの具体的な制御方を提示する。

さらに提案手法を磁気浮上システムに適用し、従来法 [6] と比較することにより提案手法の有効性検証を行なう。

## 2 問題設定

時間区間  $[0, \infty)$  で定義される以下の線形時不変システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} u \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in R^n$  は状態、 $x_0 = x(0)$  は初期状態、 $u \in R^r$  は制御入力、 $y \in R^m$  は観測出力、 $z \in R^q$  は被制御量、 $w \in R^p$  は外乱であり、 $w(t)$  は区間  $[0, \infty)$  において2乗可積分関数 ( $w \in L^2[0, \infty)$ ) とする。

一般性を失うことなく  $x_0$  は初期状態の不確かさとして扱うことが出来、 $x_0 = 0$  を既知の初期状態とすることが出来る。

またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく [5]。

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$  は適当な次元を有する定数行列であり、以下の条件を満たすものとする。

- $(A, B_1)$ : 可制御       $(A, C_1)$ : 可観測
- $(A, B_2)$ : 可制御       $(A, C_2)$ : 可観測

- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$ : 正則

- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$ : 正則

システム (1) に対して、すべての許容制御則  $u(t)$  が以下の線形時不変システムで与えられ、(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする。

$$\begin{aligned} u &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\zeta(t)$  はコントローラの状態であり、有限の次元を持つものとする。また  $J, K, G, H$  は定数行列であり、適切な次元を持つものとする。

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の混合減衰  $H_\infty$  制御問題を考える。

### 問題 1 DIA 制御問題

$N > 0$  が与えられたときに、すべての  $z \in L^2[0, \infty)$  とすべての  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $H_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。

初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す。行列不等式の意味でより大きな  $N$  を選ぶことは、初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する。

特別なケースとして、初期状態が既知、つまり  $x_0 = 0$  であるときには、制御問題はすべての  $w \in L^2[0, \infty)$  に対して、以下を満足する許容制御則を見つけるとい問題になる。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 \quad (4)$$

この場合には通常の  $H_\infty$  制御問題と一致する。

### 3 外乱と初期状態の混合減衰 $H_\infty$ 制御 (DIA 制御)

定義により、DIA 制御は初期状態が既知である場合 ( $x_0 = 0$ ) にはある  $H_\infty$  制御になる。このことにより DIA 制御もそれに類似した制御則の構造を持つものと考えられる。そこで問題を解くために、以下の所謂 2-Riccati 条件を考える。

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で、解  $M > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} &M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ &+ (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ &- M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ &+ C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで以下の行列

$$\begin{aligned} &A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 \\ &- B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M \end{aligned} \quad (6)$$

は安定である。

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で，解  $P > 0$  が存在する。

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ & + P (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ & - P (C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ & + B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで以下の行列

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1 \end{aligned} \quad (8)$$

は安定である。

(A3)  $\rho(PM) < 1$

ここで  $\rho(X)$  は行列  $X$  のスペクトル半径を表し， $\rho(X) = \max |\lambda_i(X)|$  である。

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる。

補題 1 システム (1) に対して，仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする。このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラはすべての外乱  $\forall w \in L^2[0, \infty)$  とすべての初期状態  $\forall x_0 \in R^n$  (ただし,  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0 \quad (9)$$

を満たす。

ここで  $H_\infty$  セントラルコントローラは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \\ \dot{\zeta} &= A\zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ & \quad + (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

証明 仮定 (A1), (A3) のもとで，行列  $S = M(I - PM)^{-1}$  は (A2) の解  $P > 0$  によって定義される Riccati 方程式の解となることを用いる。

$$\begin{aligned} & S(A + P C_1^T C_1 - (B_2 + P C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ & + (A + P C_1^T C_1 \\ & - (B_2 + P C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T S \\ & - S((B_2 + P C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2 + P C_1^T D_{12})^T \\ & - (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (P C_2^T + B_1 D_{21}^T)^T) S \\ & + C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$[x^T, (x - \zeta)^T]^T \in L_2$  に対して定義される汎関数  $V(t)$  を考える。

$$V(t) := \zeta^T S \zeta + (x - \zeta)^T P^{-1} (x - \zeta) \quad (12)$$

$V(t)$  の両辺を解曲線に沿って微分し，(A2) と  $S$  を用いて平方完成の変形を行なうと，汎関数  $V(t)$  の微分は以下のように整理される。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\|z\|^2 + \|w\|^2 \\ & \quad + \|(D_{12}^T D_{12})^{1/2} u + (D_{12}^T D_{12})^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \|^2 \\ & - \|w - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) S \zeta \\ & - (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T)) \\ & \times P^{-1} (x - \zeta) \|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

そして両辺を区間  $[0, \infty)$  で積分すると，許容方策対の定義から  $V(\infty) = 0$  であり，さらに (10) の  $H_\infty$  セントラルコントローラ  $u(t)$  を (13) に代入すると

$$\begin{aligned} -x_0^T P^{-1} x_0 &= -\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2 \\ & - \|w - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) S \zeta \\ & - (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T)) \\ & \times P^{-1} (x - \zeta) \|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

よって最終的に以下を得る。

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0$$

明らかに，この補題は (A2) の Riccati 解  $P$  に関するものであり， $N$  に関する条件になっていない。つまり不等式 (9) は一般には不等式 (3) を満足しなく，ここでの結論は DIA 制御問題に対する解ではない。

そこでつぎに以下の不等式を考えてみる。

(A4)  $N < P$ ,  $(N^{-1} > P^{-1})$ .

もし仮定 (A4) が満たされるならば，不等式 (9) により，明らかに不等式 (3) が成り立つ。つまりセントラルコントローラ (10) が DIA 制御となる。

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (15)$$

$N$  は初期状態の不確かさの指標として扱うことができる (例えば分散行列) ため，もし初期状態の不確かさが十分に小さいならば，つまり (A4) が満たされるならば，セントラルコントローラは初期状態の不確かさに対してロバスト性を有することになる。

上記の議論により，仮定 (A4) はセントラルコントローラが DIA 制御であるための必要条件のようにも見えるが，それは正しくない。真の必要十分条件を示すことによってこの事実を明らかにする。これが本論文の主結果である。

結果を述べるために以下の仮定を導入する。

(A5)  $Q + N^{-1} - P^{-1} > 0$ ,

ここで  $Q$  は以下の Riccati 方程式の最大解である。

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1}) \\ & + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1})^T Q \\ & - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ & = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで  $L := (I - PM)^{-1}$ .

定理 1 システム (1) に対して, 仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする. このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラ (10) が DIA 制御であるための必要十分条件は条件 (A5) を満たすことである.

注意 1 Riccati 方程式 (16) はすべての  $P^{-1}$  に対して最大解  $Q \geq 0$  を持つ. つまり  $(A, B_1)$  は可安定であるから

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1} \\ & - (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \quad (17) \end{aligned}$$

は安定となる.

#### 4 定理 1 の証明

直接証明を行なうことが困難であるため, ここでは補題 2 と補題 3 を示すことにより定理 1 の証明を行なう. 補題 2 と補題 3 では以下の仮定を用いる.

(A6): すべての外乱  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての初期状態の不確かさ  $x_0 \in R^n$ , ただし  $(w, x_0) \neq 0$ , に対して以下の不等式が成り立つ.

$$\|w - w_0\|_2^2 + x_0^T (N^{-1} - P^{-1}) x_0 > 0 \quad (18)$$

ただし, ここで  $w_0$  は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} w_0 &= D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) S \zeta \\ &+ (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T)) \\ &\times P^{-1} (x - \zeta) \quad (19) \\ \dot{\zeta} &= (A + P C_1^T C_1 - (B_2 + P C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} \\ &\times (B_2^T M + D_{12}^T C_1) L \\ &+ (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ &\times (C_2 P + D_{21} B_1^T) S) \zeta \\ &+ (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} \\ &\times (w - w_0) \quad (20) \end{aligned}$$

上記の仮定を用いて以下の補題 2 および補題 3 が得られる.

補題 2 システム (1) に対して, 仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする.  $H_\infty$  セントラルコントローラ (10) が DIA 制御であるための必要十分条件は条件 (A6) を満足することである.

証明  $[x^T, (x - \zeta)^T]^T \in L_2$  に対して定義される汎関数  $V(t) : V(t) = \zeta^T S \zeta + (x - \zeta)^T P^{-1} (x - \zeta)$  を考える.

$V(t)$  の両辺を解曲線に沿って微分し, (1) と (10) を用いて平方完成の変形を行い, そして両辺を区間  $[0, \infty)$  で積分すると以下のように整理される.

$$-x_0^T P^{-1} x_0 = -\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2 - \|w - w_0\|_2^2 \quad (21)$$

(21) を (18) に代入することにより以下が得られる.

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0. \quad (22)$$

逆に (21) を (3) に代入することにより

$$\|w - w_0\|_2^2 + x_0^T (N^{-1} - P^{-1}) x_0 > 0 \quad (23)$$

が得られる.

補題 3 システム (1) に対して, 仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする. このとき仮定 (A6) は仮定 (A5) に一致する.

証明  $f(t) \in L_2$  に対して定義される汎関数  $U(t) := f^T Q f$  を考える. ここで  $f(t) := x(t) - L \zeta(t)$  は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= (A + B_1 (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ &\times (C_2 P + D_{21} B_1^T)) P^{-1} f \\ &+ (B_1 - L (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21}) \\ &\times (w - w_0) \\ f(0) &= x_0 \quad (24) \end{aligned}$$

$U(t)$  の両辺を解曲線に沿って微分し, 平方完成の変形を行なう. そして両辺を区間  $[0, \infty)$  で積分すると, 許容方策対の定義からやはり  $U(\infty) = 0$  であり, 最終的に以下のように整理される.

$$-x_0^T Q x_0 = \|w - w_0 + (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ \times (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q f\|_2^2 - \|w - w_0\|_2^2 \quad (25)$$

(25) を (A6) に代入することにより以下が得られる.

$$\begin{aligned} & \|w - w_0 + (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ & \times (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q f\|_2^2 \\ & + x_0^T (Q + N^{-1} - P^{-1}) x_0 > 0. \quad (26) \end{aligned}$$

上式左辺第 1 項は正であり, 第 2 項は 2 次形式となっているため

$$Q + N^{-1} - P^{-1} > 0.$$

となる.

よって補題 1, 補題 2 により定理 1 が証明された.

## 5 磁気浮上システムへの応用

得られた提案法を磁気浮上システムへ応用し, 有効性を検証する.

### 5.1 制御系設計

磁気浮上システムの状態空間表現は以下で与えられることが知られている [6,7].

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \quad (27) \end{aligned}$$

ここで  $x_g := [x \ \dot{x}]^T$  は状態,  $u_g$  は制御入力,  $v_0$  と  $w_0$  は外乱を表す. 状態変数  $x(t)$  は電磁石と浮上体との間の距離であり,  $i(t)$  は電磁石電流である.

まずシステム外乱  $v_0(t)$  と  $w_0(t)$  に関して考察する.  $v_0$  は入力への外乱で, 低周波帯域で影響を及ぼす. また  $w_0$  は出力外乱, およびモデルの不確かさを表す. そこで重み関数  $W_v$  および  $W_w$  を導入し  $v_0, w_0$  を以下のように表す.

$$v_0 = W_v(s) w_2 \quad (28)$$

$$W_v = \Phi C_w (sI - A_w)^{-1} B_w, \quad \Phi = [1 \ 1]^T$$

$$w_0 = W_w w_1 \quad (29)$$

つぎに被制御変数について考慮する. 本研究では第 1 目的が浮上体の非接触安定支持であるため, 被制御量としてギャップ

長  $x(t)$  とその微分値  $\dot{x}(t)$  を選ぶ．これらの状態変数に，レギュレーションのために重み付けし，被制御量  $z_1$  を以下のように定義する．同様に制御入力  $u_g$  のレギュレーションのために  $u_g$  に重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する．

$$z_g = F_g x_g, \quad F_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_1 \quad \theta_2] \\ z_2 &= \rho u_g \end{aligned} \quad (31)$$

ここで  $\Theta$  は被制御変数  $z_g$  に対する重み行列， $\rho$  は制御入力  $u_g$  に対する重み係数である．

最終的には制御対象と重み行列をまとめ，一般化プラントを (32) のように構成する．なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい [ 5 ] ．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} u \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} C_g & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} W_w & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで  $x := [x_g^T \quad x_w^T]^T$  であり， $x_w$  は  $W_w(s)$  の状態である．また  $w, z$  を， $w := [w_1^T \quad w_2^T]^T$ ， $z := [z_1^T \quad z_2^T]^T$  と構成した．

得られた一般化プラントに対して，本制御系設計での制御問題は以下のように設定する．

制御問題：DIA 条件 (3) を達成する，外乱と初期状態の不確かさの影響を減衰させる，許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ．

上記の制御問題に対する解を得るため，MATLAB 上で制御系設計に関して繰り返し計算を行なうことによって設計パラメータ； $W_v(s)$ ， $W_w$ ， $\Theta$ ， $\rho$  を適切に選定し，直接的に  $H_\infty$  DIA コントローラ  $K(s)$  の数値解を求めた． $K(s)$  の周波数応答を Fig.1 に実線で示す．またこのときの重み行列  $N$  の最大値は  $N = 0.027735 \times I$  である．

比較のため従来の  $H_\infty$  コントローラ  $K_\infty(s)$  を設計した．ここで  $K_\infty(s)$  は MATLAB コマンド `hinfsyn.m` を用いた [ 8 ] ． $K_\infty(s)$  の周波数応答を Fig.1 に点線で，また文献 [ 6 ] で得られた DIA コントローラ  $K_{DIA_1}(s)$ ， $K_{DIA_2}(s)$  の周波数応答を同じく Fig.1 にそれぞれ点線，一点鎖線で示す．

これらより  $K(s)$  は低周波帯域でハイゲインを有し，また高周波帯域で良好なロールオフ特性を有するという PID 補償を改善した応答を示している．

一方，従来の DIA 制御の設計の枠組みでは  $K_{DIA_1}(s)$  や  $K_{DIA_2}(s)$  の周波数応答が示すように低周波での積分特性を持たせることが困難であった [ 3,6 ] ．

## 5.2 数値シミュレーションによる検証

$K(s)$  の特性を評価するためにシミュレーションにより過渡応答特性を確認する．特に非零の初期値応答と，ステップ目標値応答について検証を行なう．初期状態  $x_0 = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.1]^T$  に対する初期値応答を Fig.2 に，またステップ目標値 (0.0[mm]  $\rightarrow$  0.1[mm]) に対する時間応答を Fig.3 に示す．ここで目標値信号は約 1.0[s] に入力した．

Fig.2 においてコントローラ  $K_{DIA_1}$  と  $K_{DIA_2}$  は  $K$  に比べて比較的良好な初期値応答特性を有している．しかし Fig.3 において素早い応答を示しているものの，大きなオーバーシュートを示し，さらに大きな問題は僅かに定常偏差を残していることである．応答が速いことは  $K_{DIA_1}$  と  $K_{DIA_2}$  が高周波でハイゲインを有していることに起因し，定常偏差を残しているのは低周波ゲインが低いことが原因である．また実際に  $K_{DIA_1}$ ， $K_{DIA_2}$  を用いて制御実験すると高周波ゲインが原因で多少振動的になることが分かっている [ 6 ] ．

これに比べ  $K$  は Figs.2,3 とともに  $K_\infty$  より良好な結果を得ており，また  $K_{DIA_1}$  と  $K_{DIA_2}$  で問題となった定常偏差も見られないバランスの良い補償器となっている．従来問題設定では，制御系設計の自由度が少なかったために， $K$  のような良好な周波数特性を有するコントローラの設計が困難であった [ 6 ] ．

以上すべての結果を総合的に評価して，コントローラ  $K$  は様々な性能指標に照らし合わせて見ても，それぞれに対して良好な性能を有している．

## 6 おわりに

本論文では無限時間区間における外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題を直交条件を課さない場合について定式化し，その問題に対して解を与えている．得られた解は従来結果の自然な拡張になっているものの，複雑な式展開を必要とする [ 3,6 ] ．具体的には混合減衰  $H_\infty$  制御問題に対して可解条件の必要十分条件を導出し，さらに解の構成法の一つを示した．

また得られた外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  コントローラを磁気浮上システムに応用し，従来の  $H_\infty$  コントローラ，また過去の  $H_\infty$  DIA コントローラ [ 6 ] と比較することにより，提案法の特性を検証し，有効性を確認した．

今後提案法を実際の制御対象に適用し，制御実験を行なう予定である．

文 献

- [ 1 ] K. Uchida and M. Fujita, "Controllers Attenuating Disturbance and Initial-Uncertainties for Time-Varying Systems," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 156, Springer-Verlag, pp. 187 - 196, 1991.
- [ 2 ] P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal and K. R. Poolla, " $H_\infty$  Control with Transient," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, pp. 1373 - 1393, 1991.
- [ 3 ] K. Uchida and A. Kojima and M. Fujita, " $H_\infty$  control attenuating initial-state uncertainties," *Int. J. of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 245 - 252, 1997.
- [ 4 ] A. Kojima, M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura, "Linear Quadratic Differential Games and  $H_\infty$  Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -," *Trans. SICE*, vol. 28, no. 5, pp. 570 - 577, 1992.
- [ 5 ] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [ 6 ] T. Namerikawa, M. Fujita and R. S. Smith, " $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties : Evaluation by a Magnetic Suspension System", *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 87-92, 2001.
- [ 7 ] T. Namerikawa and M. Fujita, "Uncertain Structure and  $\mu$ -Synthesis of a Magnetic Suspension System," *Trans. IEE of Japan*, vol. 121-C, no. 6, pp. 1080-1087, 2001.
- [ 8 ] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K. Uchida, " $\mu$ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 530-536, 1995.

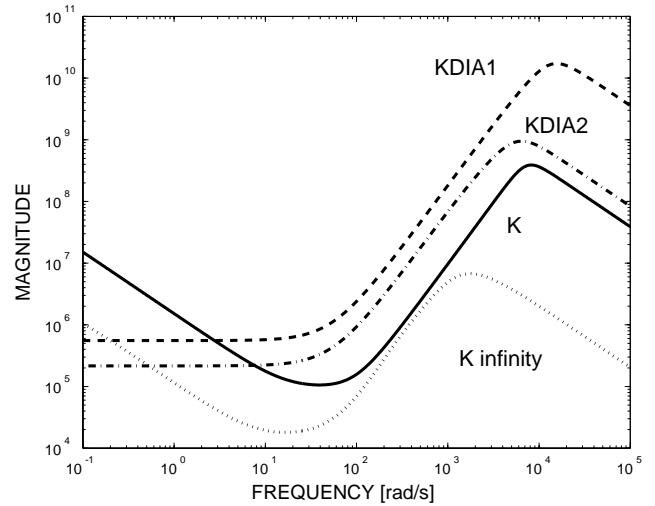


Fig.1 Frequency Response:  $K$ ,  $K_{DIA1}$ ,  $K_{DIA2}$ ,  $K_\infty$

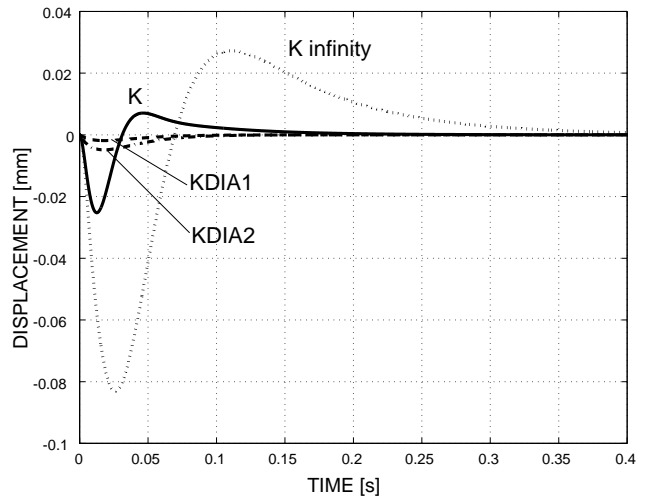


Fig.2 Initial Responses for  $x_0 = [0.0 \ 0.0 \ 0.1]^T$

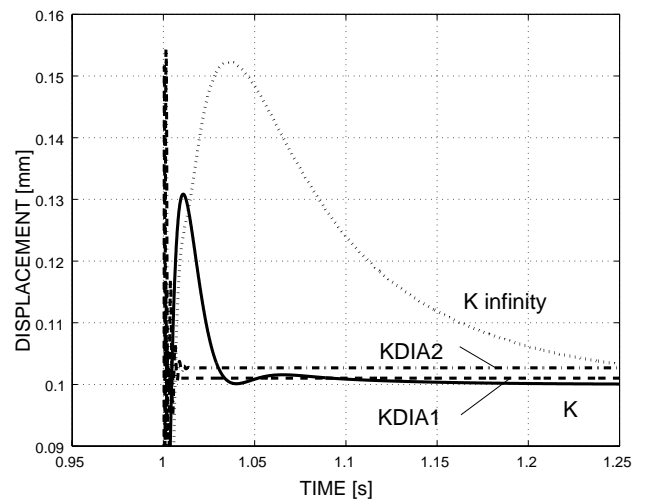


Fig.3 Step Responses