

逃避時間回避を考慮した H_∞ フィルタによる 移動ロボットの自己位置推定と環境認識

大川 佳寛*・滑川 徹**

Simultaneous Localization and Mapping Problem via H_∞ Filter Considering Finite Escape Time

Yoshihiro OKAWA* and Toru NAMERIKAWA**

This paper deals with the Simultaneous Localization and Mapping problem via H_∞ filter considering finite escape time. The estimation via H_∞ filter occurs finite escape time depending on the value of the parameter γ and then the estimation fails or deteriorates. In order to avoid it, we propose a novel algorithm of the update equation of the filter gain. The convergence of the error covariance matrices are proven. In simulation and experimental results, the avoidance of the finite escape time and the correctness of derived theorems for the convergence are confirmed and then we can show robot's state and environment information can be estimated.

Key Words: SLAM, H_∞ filter, finite escape time

1. はじめに

近年、掃除ロボットなどに挙げられるような人間の生活環境で動作する自律移動ロボットが増えてきている¹⁾。しかし、そのような自律移動ロボットに対して事前に環境地図を与えられない場合が多い。そのためロボット自身が周囲の環境情報の取得を行ない、また現在どこにいるのかを認識することが必要不可欠となる。これは、周囲の環境地図作成と移動ロボットの自己位置推定を行なうことであり、Simultaneous Localization And Mapping (以下 SLAM) 問題と呼ばれている²⁾。

SLAM 問題が複雑となる要因のひとつとして、ロボットの自己位置と姿勢、ランドマークの位置といった不確かさを含む大量のデータをオンラインで処理する必要があることが挙げられる。また、これらのデータの不確かさの対処が必要なことも複雑化の要因である。移動ロボットについていえば、移動するときに生じる誤差や、システムのモデル化誤差などにより、自己位置に不確かさが含まれる。また、環境情報を取得するために用いるセンサにも観測の際に雑音が含まれる。これらの雑音による不確かさの蓄積により、推定結果が悪化し最終的に推定失敗となる。よってこれらの不確かさに上手

く対処することが必要である³⁾。この SLAM 問題への解法として確率的解法が最も主流となっており、問題がもつ不確実性と雑音に対して、雑音自体と、雑音が観測値に与える影響をモデル化している。確率的解法にはさまざまな種類があり、拡張カルマンフィルタ (EKF)⁴⁾、アンセンテッドカルマンフィルタ (UKF)⁵⁾、パーティクルフィルタ (FastSLAM)⁶⁾ などによる解法が挙げられる。その中で最も一般的に用いられるのは EKF であるが、その問題点の一つとして雑音が白色ガウス性をもつことを仮定している点が挙げられる。そこで本稿では EKF よりロバストである H_∞ フィルタを用いた SLAM 問題について扱う。 H_∞ フィルタの研究結果としては文献 7), 8) などがあり、SLAM 問題に対する手法はすでに文献 9), 10) などで提案されている。しかし文献 9) で述べられているとおり、 H_∞ フィルタを用いた推定では、設計パラメータ γ の値によっては推定誤差共分散行列の値が発散する逃避時間が発生し、推定精度の悪化や推定失敗を引き起こす場合がある。

そこで本稿では、逃避時間回避を目的としてアルゴリズムを修正した逃避時間回避 H_∞ フィルタ (以下 FET-HF) による SLAM 問題の解法を提案する。そのアルゴリズムでは推定誤差共分散行列の更新式に重み付けをすることで、その発散を抑え、逃避時間回避を達成する。その重み付けの方法であるが、毎時刻重み付けを行なうと、必要以上に推定誤差共分散行列の値が抑えられ、その値を用いたフィルタによる誤差の修正がされなくなる恐れがある。本稿では重み付けの有無を各時刻における推定誤差共分散行列の対角和の値によって決定する方法を提案する。また、本稿における問題設定は、従来研究の文献 2)~4), 9), 10) などと同様に環境が M 個の点

* 慶應義塾大学院理工学研究科 横浜市港北区日吉 3-14-1

** 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Graduate School of Science and Engineering, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

** Faculty of Science and Engineering, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

(Received January 24, 2012)

(Revised June 29, 2012)

ランドマークによって構成されており、それらが静的である問題を考える。ここで H_∞ フィルタリングを用いるために、非線形システムで表わされる SLAM 問題のシステムをテイラー展開によって線形化し、そのシステムに対して H_∞ フィルタリングを用いた場合について調べる。また本稿で提案する FET-HF を用いた手法の有用性を理論的に確認するために、移動ロボットの静止時において、提案したアルゴリズムの更新につれて推定誤差共分散行列が収束することを証明する。さらにシミュレーション結果と、ソナーセンサを搭載した移動ロボットによる制御実験の検証結果より、修正したアルゴリズムによって、実際に推定誤差共分散行列が発散せず、逃避時間を回避して収束していることと、さらには提案法が従来法に比べ、推定精度が優れていることを示す。

2. 問題設定

2.1 自己位置推定と環境認識問題

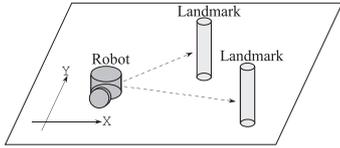


Fig. 1 System configuration

Fig. 1 にシステムの全体図を示す。移動ロボットを取り巻く環境を X - Y 平面上に散在する M 個の静止しているランドマークによって構成されると仮定し、ロボットにノイズを含む各ランドマークの観測情報と、ロボット自身のオドメトリデータを用いて、この M 個の未知のランドマークの位置とロボット自身の自己位置を同時に推定させる問題を考える。SLAM 問題は、ロボットとランドマークの状態遷移を表わすプロセスモデルと、ロボットとランドマークの相対関係を表わす観測モデルの二つのモデルで構成される。

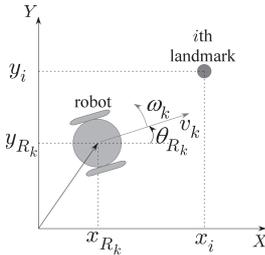


Fig. 2 State model

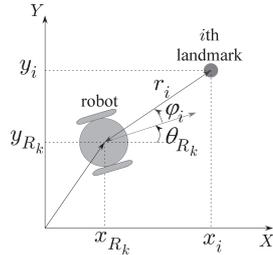


Fig. 3 Observation model

2.2 プロセスモデル

プロセスモデルはロボットが環境下をどのように動いたかを表現する。まずロボットの状態について考える。Fig. 2 に状態モデルの図を示す。あるステップ時刻を k とし、姿勢角と X - Y 座標で構成されるロボットの状態ベクトルを $\mathbf{x}_{R_k} := [\theta_{R_k} \ x_{R_k} \ y_{R_k}]^T \in \mathbb{R}^3$ とする。すると、ロボットの状態更新式はオイラー法による直線近似を用いて以下のように表現できる。

$$\mathbf{x}_{R_{k+1}} = \mathbf{f}_R(\mathbf{x}_{R_k}, v_k, \omega_k) + \mathbf{e}_{R_k} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{x}_{R_k}, v_k, \omega_k) := \begin{bmatrix} \theta_{R_k} + T\omega_k \\ x_{R_k} + Tv_k \cos\theta_{R_k} \\ y_{R_k} + Tv_k \sin\theta_{R_k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$v_k \in \mathbb{R}^1, \omega_k \in \mathbb{R}^1$ はロボットに入力される速度および角速度、 $\mathbf{f}_R \in \mathbb{R}^3$ はロボットの状態遷移を規定する非線形関数、 T はサンプリング時間である。また $\mathbf{e}_{R_k} \in \mathbb{R}^3$ はロボットに加わるプロセス雑音である。つぎにランドマークの位置について考える。ランドマークを姿勢角の情報のない X - Y 座標上の点と仮定し、 i 番目のランドマークの X - Y 座標を $\mathbf{p}_i := [x_i \ y_i]^T \in \mathbb{R}^2$ 、 M 個全体のランドマークの座標をまとめたものを $\mathbf{p}_{all} = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \cdots \ \mathbf{p}_M^T]^T \in \mathbb{R}^{2M}$ とする。

移動ロボットとランドマークを一つの拡大システムと考え、システム全体の状態遷移をつぎのように定義する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{R_{k+1}} \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R(\mathbf{x}_{R_k}, v_k, \omega_k) \\ \mathbf{p}_{all} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{R_k} \\ \mathbf{0}_{2M \times 1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, v_k, \omega_k) + \mathbf{e}_{1k} \quad (4)$$

ただし $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{3+2M}$ はシステムの状態ベクトル、 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3+2M}$ は状態遷移を規定する非線形関数、 $\mathbf{e}_{1k} \in \mathbb{R}^{3+2M}$ はプロセス雑音であり、本稿では確率的な信号とみなし、平均 $\mathbf{0}$ 、共分散は $\mathbf{Q}_k (> \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{(3+2M) \times (3+2M)}$ である。

2.3 観測モデル

つぎに観測モデルについて考える。観測モデルではロボットと各ランドマーク間の相対距離および相対角度を表現する。Fig. 3 に観測モデルの図を示す。ロボットと i 番目のランドマークとの相対距離を r_i 、相対角度を φ_i とすると、 i 番目のランドマークを観測する際の観測方程式は以下ようになる。

$$\mathbf{y}_{i_k} = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_{2i_k} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) := \begin{bmatrix} \varphi_i \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(dy_i/dx_i) - \theta_{R_k} \\ \sqrt{dy_i^2 + dx_i^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$dx_i := x_i - x_{R_k}, \quad dy_i := y_i - y_{R_k} \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ は i 番目のランドマークの観測を表わす関数、 $\mathbf{e}_{2i_k} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ は i 番目のランドマークにおける観測雑音で、確率的な信号であり、平均 $\mathbf{0}$ 、共分散は $\mathbf{R}_{i_k} (> \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ である。

M 個の各ランドマークに対する観測出力を一つにまとめ、システム全体の観測方程式をつぎのように定義する。

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1_k}^T & \mathbf{y}_{2_k}^T & \cdots & \mathbf{y}_{M_k}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_{2k} \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ は観測出力、 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ は観測を表わす非線形関数、 $\mathbf{e}_{2k} \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ は観測雑音で、平均 $\mathbf{0}$ 、共分散は $\mathbf{R}_k (> \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$ である。

ここでシステムにおいて、以下の仮定を置く。

[仮定 1] ランドマークは静止している。

[仮定 2] センサの有効範囲は考慮しない。

[仮定 3] 同時に M 個のランドマークを観測でき、それぞれ

れどのランドマークに対する観測出力かを識別できる。

[仮定 4] 複数のランドマークとロボットが同一直線上に並ばない。

[仮定 5] プロセス雑音 e_{1k} , 観測雑音 e_{2k} はそれぞれ独立しており, 与えられた N に対して次式を満たす積算エネルギーが有界な確定的な雑音である。

$$\sum_{k=0}^N \|e_{1k}\|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^N \|e_{2k}\|^2 < \infty \quad (9)$$

仮定 2,3 はロボットに搭載されたセンサに関する仮定である。本稿ではロボットの取り巻く環境を, 有限な広さを有する空間と考える。このときロボットがどの位置に存在していても, センサはこの空間の全領域において測定可能であるとする。また, 同時に M 個のランドマークを観測した際に, 観測したデータが何個目のランドマークのものであるかというデータ対応付け問題は考慮しない。

3. H_∞ フィルタベース SLAM

つぎに H_∞ フィルタベース SLAM について議論する。

3.1 H_∞ フィルタリング問題

まず問題設定で与えた線形状態空間モデルを一般化したものを以下に示す。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (10)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (11)$$

$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ は状態ベクトル, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ は観測ベクトル, \mathbf{F}_k , \mathbf{G}_k , \mathbf{H}_k はそれぞれ $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$ 行列であり, また $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^r$ および $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ はそれぞれ, 与えられた N に対して $\sum_{k=0}^N \|\mathbf{w}_k\|^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^N \|\mathbf{v}_k\|^2 < \infty$ を満たす積算エネルギーが有界な雑音ベクトルである。すると H_∞ フィルタリング問題は, 観測データに基づく状態ベクトルの線形結合 $\mathbf{z}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$ の推定問題において, 設定パラメータ γ に対して以下の条件式 (12) 式を満たす推定値 $\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k^*$, ($k = 0, 1, \dots, N$) を見つける問題である。

$$\sup_{\mathbf{x}_0, \mathbf{w}, \mathbf{v}} \frac{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{P}_0}^2 + \sum_{k=0}^N \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{Q}_k}^2 + \sum_{k=0}^N \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbf{R}_k}^2} < \gamma^2 \quad (12)$$

ここで $\mathbf{P}_0 > 0$, $\mathbf{Q}_k > 0$, $\mathbf{R}_k > 0$ はそれぞれ初期状態 \mathbf{x}_0 , 雑音 \mathbf{w}_k , \mathbf{v}_k に対する重み行列である。(12) 式はエネルギーが有界であるすべての雑音に対して, 推定誤差エネルギーと雑音エネルギーの比をある値 γ^2 より小さくすることを表わしており¹¹⁾, これよりこのフィルタはほかのフィルタに比べて雑音特性やモデル化誤差に対してロバストである。また $\gamma \rightarrow \infty$ とすると, H_∞ フィルタはカルマンフィルタと一致することはよく知られており, 実際には, γ が設計パラメータの役割を果たし, フィルタゲインの更新をより繊細に調整することが可能となる。

3.2 H_∞ フィルタリングと逃避時間

(12) 式より, H_∞ フィルタを用いた推定では設定パラメータ γ の値が小さいほど推定精度が向上するが, γ の値を小さくしすぎると, 後述の (30) 式で表わされる Ψ_k において $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I}$ が非正定となり, その結果, (29) 式で与えられる誤差共分散行列 \mathbf{P}_k が異常に更新され, 最終的にその対角和 $\text{tr} \mathbf{P}_k$ が発散する逃避時間と呼ばれる現象が発生する⁹⁾。そしてこの逃避時間によって, 推定精度の悪化や推定失敗となる。それゆえ, これを回避する必要がある。

3.3 SLAM における H_∞ フィルタアルゴリズム

H_∞ フィルタを扱うためにつぎの仮定を置く。

[仮定 6] $(\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k)$ は可観測

ここで $\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k$ はそれぞれ遷移関数および観測関数のヤコビ行列であり各成分は以下ようになる。

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v & \mathbf{0}_{3 \times 2M} \\ \mathbf{0}_{2M \times 3} & \mathbf{I}_{2M \times 2M} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{H}_v, \in \mathbb{R}^{2M \times 3}, \quad \mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$$

ただし

$$\mathbf{F}_v := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v_k T \sin \theta_{R_k} & 1 & 0 \\ v_k T \cos \theta_{R_k} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T & -\mathbf{e}^T & \cdots & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{A}_1^T & -\mathbf{A}_2^T & \cdots & -\mathbf{A}_M^T \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_p = \text{block diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_M\} \quad (17)$$

$$\mathbf{e} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i := \begin{bmatrix} -\frac{dy_i}{r_i} & \frac{dx_i}{r_i} \\ \frac{dx_i}{r_i} & \frac{dy_i}{r_i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (18)$$

ここで, (15) 式における θ_{R_k} および (18) 式における dx_i , dy_i , $r_i (> 0)$ は, それぞれロボットの姿勢角および (6), (7) 式で規定されるロボットとランドマーク間の相対距離であり, その値は各時刻において後述のフィルタによって推定された値を用いて算出される。また, 以後の補題および定理においてもこの推定値によって算出されたヤコビ行列を用いる。

線形システムに対する H_∞ フィルタアルゴリズムを利用して, 非線形システムの線形化を含む H_∞ フィルタアルゴリズムを書き表す。このフィルタを前述の問題設定に適用すると, $\mathbf{L}_k, \mathbf{G}_k$ が単位行列となる。

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{I}_{(3+2M) \times (3+2M)}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{I}_{(3+2M) \times (3+2M)} \quad (19)$$

これとヤコビ行列を用いて線形化したシステムにより, 準最適 H_∞ フィルタリング問題の解が一意的に存在するための必要十分条件は以下の 2 つとなる¹¹⁾。

1. リカッチ方程式 (20) 式が正定解をもつ。

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k > \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\Psi_k := \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \quad (21)$$

2. (22) 式が正定解をもつ.

$$\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I} > \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (22)$$

このときロボットとランドマークの状態を推定する準最適 H_∞ フィルタは以下に示す 3 ステップの再帰的处理で与えられる. ここで $\hat{x}_{k+1|k}$, $\hat{y}_{k+1|k+1}$ はそれぞれその値が事前および事後推定値であることを表わす.

Step 1: 予測

$$\hat{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}(\hat{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k) \quad \hat{x}_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{3+2M} \quad (23)$$

$$\hat{y}_{k+1|k} = \mathbf{h}(\hat{x}_{k+1|k}) \quad \hat{y}_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{2(M+1)} \quad (24)$$

Step 2: 観測

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k} \quad (25)$$

Step 3: 更新

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (26)$$

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k+1} \quad (27)$$

\mathbf{K}_{k+1} はフィルタゲインであり, これと状態誤差共分散行列は以下のように書ける.

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k > \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\Psi_k = (1 + \delta_k) \{ \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \} \quad (30)$$

従来の H_∞ フィルタでは γ の値によって, この誤差共分散行列が発散する逃避時間が発生する. そこで本稿で提案する FET-HF ではここに改良を加え, Ψ_k を (30) 式のように $(1 + \delta_k)$ 倍したアルゴリズムを用いる. この重み付けを行なうことによって, (29) 式より, その逆行列を用いて計算される誤差共分散行列の更新が抑制され, 逃避時間回避を達成する. しかしながらこの重み付けを毎時刻行なうと, 必要以上に推定誤差共分散行列の値が抑えられ, (26), (28) 式より, その値を用いたフィルタによる誤差の修正が十分に行なわれなくなる. そこで, 本稿では次式のような値の有無が各時刻における状態誤差共分散行列の対角和 $\text{tr} \mathbf{P}_k$ とその閾値 P_{lim} の大小関係より決定する δ_k を用いて重み付けを行なう.

$$\delta_k := \begin{cases} \delta (> 0) & (\text{tr} \mathbf{P}_k \geq P_{lim}) \\ 0 & (\text{tr} \mathbf{P}_k < P_{lim}) \end{cases} \quad (31)$$

この新規パラメータ δ , P_{lim} の設計方法であるが, まず, δ については, その値が小さい場合は推定誤差共分散行列が抑えられずに発散し, 逃避時間が発生する. またその値を大きくすると, 逃避時間は回避できるが, 誤差の修正が十分に行なわれなくなり, その結果, 推定誤差が増加する場合がある. 一方で, 閾値 P_{lim} はその値が大きすぎる場合は誤差共分散行列の値を抑えられずに発散し, その値が小さすぎる場合は必要以上に誤差共分散行列の値を抑えてしまい, 誤差の修正が十分に行なわれなくなる. よって δ , P_{lim} は以上のことを踏まえて, その値を適切に設定する必要がある.

ここでフィルタの存在条件としてつぎの補題が成り立つ.

[補題 1] 仮定 1~6 が成り立つとする. このときロボットが静止しているとする. 準最適 H_∞ フィルタリング問題の解が一意に存在するための必要十分条件は (32) 式を満たすことである.

$$\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I} > \mathbf{0}, \quad k = 0m, 1, \dots, N \quad (32)$$

[Proof] ロボットが静止しているとする. このときヤコビ行列 \mathbf{F}_k およびプロセス雑音の共分散行列 \mathbf{Q}_k はそれぞれ適切な次元の単位行列および零行列となる. すると (20) 式は以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_k \Psi_k^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k \left[(1 + \delta_k) \{ \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \} \right]^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k (1 + \delta_k)^{-1} \{ \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I}) \mathbf{P}_k \}^{-1} \\ &= (1 + \delta_k)^{-1} (\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I})^{-1} > \mathbf{0} \quad (33) \end{aligned}$$

これより (33) 式は (22) 式の逆行列を $(1 + \delta_k)^{-1}$ 倍したものである. ここで $1 + \delta_k > 0$ であり, 正定行列の逆行列も正定行列であるので, 2 つの存在条件 (20), (22) 式は 1 つにまとめることができる. よって準最適 H_∞ フィルタリング問題の解が一意に存在するための必要十分条件は (32) 式で与えられる. \square

3.4 推定誤差共分散行列の収束性

SLAM 問題を確率的に考える場合, 推定誤差共分散行列 \mathbf{P}_k が推定の不確かさを示すパラメータとなり, その大きさは行列式 $|\mathbf{P}_k|$ を用いて表わされる^{12), 13)}. しかしながら, ロボットが移動している場合, ヤコビ行列 \mathbf{F}_k および \mathbf{H}_k は時刻によって変化し, またプロセス雑音も常に加わるため, その収束性を示すことは困難である. そこで本節ではシステムの収束性として, 前節で提案した FET-HF を用いた推定において, ロボットが静止時にアルゴリズムが更新するにつれて誤差共分散行列の行列式が収束することを示す.

時刻 k において移動ロボットが静止したときの推定誤差共分散行列の値を \mathbf{P}_k^0 とし, その後 i 回観測が行なわれたときの推定誤差共分散行列の値を \mathbf{P}_k^i とする. また, 式を簡略化するために \mathbf{W}_k を (34) 式のようにおく.

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I} \quad (34)$$

ここでロボットが静止しているとする. 観測関数のヤコビ行列 \mathbf{H}_k は各観測において同じ値となる. すると, (34) 式より \mathbf{W}_k も各観測において同じ値となるので $\mathbf{W}_k = \mathbf{W}$ とし, 各成分を以下のようにおく.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_v^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_v - \gamma^{-2} \mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_v^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_p \\ \mathbf{H}_p^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_p - \gamma^{-2} \mathbf{I}_{2M} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \quad (35) \end{aligned}$$

このときロボットが静止した状態でランドマークを観測し続けたとするとつぎの定理が成り立つ.

《定理 1》 仮定 1~6 が成り立ち, さらにロボットが静止状態

でランドマークを観測し続けたと仮定する. H_∞ フィルタが存在するとき, 推定誤差共分散行列の行列式 $|\mathbf{P}_k|$ がアルゴリズムの更新につれて単調減少する条件は (36) 式を満たすことである.

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I} > 0 \quad (36)$$

[Proof] ロボットが静止していると仮定すると, 補題 1 と同様に \mathbf{F}_k および \mathbf{Q}_k はそれぞれ $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{0}$ となる. よって (29) 式より \mathbf{P}_k^1 は (37) 式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^1 &= (1 + \delta_k)^{-1} (\mathbf{P}_k^{0^{-1}} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \gamma^{-2} \mathbf{I})^{-1} \\ &= (1 + \delta_k)^{-1} (\mathbf{P}_k^{0^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで $\mathbf{P}_k^{0^{-1}}$ が正定行列であるとする, 正定行列の行列式における特性 (付録 A 参照) および $\delta_k > 0$ より (36) 式が満たされるとき, $|\mathbf{P}_k^1|$ と $|\mathbf{P}_k^0|$ の関係は以下ようになる.

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_k^1| &= \left| (1 + \delta_k)^{-1} (\mathbf{P}_k^{0^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} \right| \\ &\leq \left| (\mathbf{P}_k^{0^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} \right| \\ &< \left| \mathbf{P}_k^{0^{-1}} \right|^{-1} = |\mathbf{P}_k^0| \end{aligned} \quad (38)$$

同様に \mathbf{P}_k^i が正定行列であるとする, (36) 式が満たされるとき, $|\mathbf{P}_k^{i+2}|$ は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_k^{i+2}| &= \left| (1 + \delta_k)^{-1} (\mathbf{P}_k^{i+1^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} \right| \\ &= (1 + \delta_k)^{-1} \left| \{ (1 + \delta_k) (\mathbf{P}_k^{i^{-1}} + \mathbf{W}) + \mathbf{W} \}^{-1} \right| \\ &\leq \left| \{ (1 + \delta_k) (\mathbf{P}_k^{i^{-1}} + \mathbf{W}) + \mathbf{W} \}^{-1} \right| \\ &< \left| \{ (1 + \delta_k) (\mathbf{P}_k^{i^{-1}} + \mathbf{W}) \}^{-1} \right| = |\mathbf{P}_k^{i+1}| \end{aligned} \quad (39)$$

以上より帰納的に, ロボットが静止状態で, かつ (36) 式が満たされるとき, 推定誤差共分散行列の行列式は単調減少する. \square

ここで, $1 + \delta = \Delta$ とおく. すると (29)~(31) 式より, 本稿が提案する FET-HF による推定では, ロボットが静止状態での誤差共分散行列は, 各時刻における誤差共分散行列の対角和 $\text{tr} \mathbf{P}_k^i$ の値によってつぎのように更新される.

$$\mathbf{P}_k^{i+1} = \begin{cases} \Delta^{-1} (\mathbf{P}_k^{i^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} & (\text{tr} \mathbf{P}_k^i \geq P_{lim}) \\ (\mathbf{P}_k^{i^{-1}} + \mathbf{W})^{-1} & (\text{tr} \mathbf{P}_k^i < P_{lim}) \end{cases} \quad (40)$$

これより誤差共分散行列の逆行列についてつぎの補題が成り立つ.

[補題 2] 仮定 1~6 が成り立つとする. ロボットが時刻 k で静止し, その後に観測が $n (> 0)$ 回行なわれている間に, $\text{tr} \mathbf{P}_k^i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) が $\text{tr} \mathbf{P}_k^i \geq P_{lim}$ に l ($0 \leq l \leq n$) 回なるとし, その各時刻を $k + l_p$ ($p = 1, 2, \dots, l$) とすると, 誤差共分散行列の逆行列は以下のように書き表わすことができる.

(1) $l = 0$ の場合

$$\mathbf{P}_k^{n-1} = \mathbf{P}_k^{0^{-1}} + n\mathbf{W} \quad (41)$$

(2) $l \neq 0$ の場合

$$\mathbf{P}_k^{n-1} = \Delta^l \mathbf{P}_k^{0^{-1}} + (d_l + n)\mathbf{W} \quad (42)$$

ただし

$$d_l := \Delta^l - 1 + (\Delta - 1) \sum_{j=1}^l \Delta^{l-j} l_j \quad (43)$$

[Proof] (付録 B 参照.) \square

ここで \mathbf{P}_k^0 の逆行列の各成分を以下のように定義する.

$$\mathbf{P}_k^{0^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k11}^{-1} & \mathbf{P}_{k12}^{-1} \\ \mathbf{P}_{k21}^{-1} & \mathbf{P}_{k22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

すると, ロボットが静止状態における誤差共分散行列の収束性についてつぎの補題が成り立つ.

[補題 3] 仮定 1~6 が成り立つとする. 静止したロボットがランドマークを観測した場合を考える. $\gamma > 0$ でロボットが静止後に観測が $n (> 0)$ 回行なわれている間に, $l (> 0)$ 回 $\text{tr} \mathbf{P}_k^i \geq P_{lim}$ となったとすると, 全状態共分散行列は以下のように表わされる. また, $n \rightarrow \infty$ としたとき推定誤差共分散行列は $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_k^n = \mathbf{0}_{3+2M}$ となる.

$$\mathbf{P}_k^n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

ここで, \mathbf{P}_{11} はロボットに関する誤差共分散行列, \mathbf{P}_{22} はランドマークに関する誤差共分散行列, \mathbf{P}_{12} , \mathbf{P}_{21} はロボットとランドマークに関する相互誤差共分散行列であり, それぞれ以下の計算で求めることができる.

$$\mathbf{P}_{11} = n^{-1} (\Phi_{11} - \Phi_{12} \Phi_{22}^{-1} \Phi_{21})^{-1} \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_{12} = -\mathbf{P}_{11} \Phi_{12} \Phi_{22}^{-1} \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_{21} = -\Phi_{22}^{-1} \Phi_{21} \mathbf{P}_{11} \quad (48)$$

$$\mathbf{P}_{22} = \Phi_{22}^{-1} \Phi_{21} \mathbf{P}_{11} \Phi_{12} \Phi_{22}^{-1} + n^{-1} \Phi_{22}^{-1} \quad (49)$$

ただし,

$$\Phi_{ij} := n^{-1} (\Delta^l \mathbf{P}_{kij}^{-1} + d_l \mathbf{W}_{ij}) + \mathbf{W}_{ij} \quad (50)$$

とし, $n^{-1} > 0$, $\Delta^l > 0$, $d_l > 0$ であり, \mathbf{P}_{k22}^{-1} , \mathbf{W}_{22} はそれぞれ正定行列であるので, Φ_{22} も正定行列である.

[Proof] 補題 2 より静止後に n 回観測が行なわれたときの推定誤差共分散行列の逆行列は, (50) 式の Φ_{ij} を用いて以下のように表わせる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{n-1} &= \Delta^l \mathbf{P}_k^{0^{-1}} + (d_l + n)\mathbf{W} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta^l \mathbf{P}_{k11}^{-1} + (d_l + n)\mathbf{W}_{11} & \Delta^l \mathbf{P}_{k12}^{-1} + (d_l + n)\mathbf{W}_{12} \\ \Delta^l \mathbf{P}_{k21}^{-1} + (d_l + n)\mathbf{W}_{21} & \Delta^l \mathbf{P}_{k22}^{-1} + (d_l + n)\mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n\Phi_{11} & n\Phi_{12} \\ n\Phi_{21} & n\Phi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

これより, (51) 式に逆行列補題を用いて計算すると, 全状態共分散行列 \mathbf{P}_k^n は (45) 式のようになり, 各成分は (46)~(49) 式で計算することができる.

ここで, $n \rightarrow \infty$ とすると (50) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{ij} = \mathbf{W}_{ij} \quad (52)$$

となる. また $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{11} = \mathbf{0}$ であるので (46)~(49) 式より,

$n \rightarrow \infty$ とすると推定誤差共分散行列 P_k^n の各成分が $\mathbf{0}$ となることから、十分時間経過後の P_k^n は $\mathbf{0}$ となる。□

以上より本稿が提案する FET-HF を用いた推定における誤差共分散行列の収束性についてつぎの定理が成り立つ。

《定理 2》 仮定 1~6 が成り立つとする。 $\gamma > 0$ でロボットが静止後に観測が行なわれたとすると、ロボットの自己位置およびランドマーク位置の推定の不確かさは単調減少し、十分時間経過後、その値は $\mathbf{0}$ となる。

[Proof] ロボットが静止状態であるとする。定理 1 より状態誤差共分散行列の行列式は単調減少する。そして補題 3 よりロボットが静止後に重み付けが行なわれる場合 ($1 \leq l \leq n$)、十分時間経過後の誤差共分散行列は $\mathbf{0}$ となる。また静止後に重み付けが行なわれない場合 ($l = 0$) の十分時間経過後の誤差共分散行列も $\mathbf{0}$ となる⁹⁾。よって本稿で提案した FET-HF による推定において、ロボットが静止して十分時間経過後の誤差共分散行列は $\mathbf{0}$ となる。□

4. シミュレーションによる検証

まずはシミュレーションにより提案手法の有用性を確認する。 $\gamma = 0.8$, $\delta = 1.5 \times 10^{-3}$, $P_{lim} = 1.0 \times 10^{-3}$ とし、その他のパラメータはそれぞれ Table 1 の値を用いてシミュレーションを行なった。また、与えた入力信号を Fig. 4, Fig. 5 に示す。なお、プロセス雑音、観測雑音は、上記の範囲内で一様分布する乱数信号を与えた。

Table 1 Simulation parameters

Parameter[Unit]	Symbol	Value
Sampling time [s]	T	0.1
Simulation time[s]	$SimTime$	500
Initial state of the robot	\mathbf{x}_{R_0}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Landmark positions [cm]	(x_i, y_i)	(60, 100), (160, 200), (60, 240), (140, 340), (100, 20)
Initial error covariance matrix of the robot	P_{R_0}	$10^{-5} \times I_3$
Initial error covariance matrix of landmarks	P_{L_0}	$10^5 \times I_{10}$
Covariance matrix of process noise	Q	$\begin{bmatrix} 10^{-6} \times I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Covariance matrix of observation noise	R	$10^{-5} \times I_{10}$
Range of process noise	Q_{max}	0.01
	Q_{min}	-0.01
Range of observation noise	R_{max}	0.05
	R_{min}	-0.05
	$R_{distance,max}$	0.5
	$R_{distance,min}$	-0.5

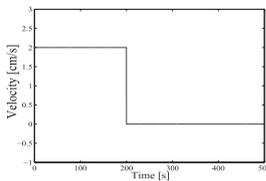


Fig. 4 Velocity

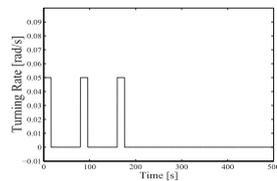


Fig. 5 Angular velocity

そしてその結果は Fig. 6~Fig. 9 のようになり、それぞれロボットの自己位置およびランドマークの位置推定結果、推定誤差共分散行列、ロボットおよびランドマークの位置推定誤差の平均二乗誤差における結果である。

まず Fig. 7 において、もとの H_∞ フィルタは発散していた

誤差共分散が、本稿で提案する重み付けを加えた逃避時間回避 H_∞ フィルタ (FET-HF) では発散しなくなり逃避時間を回避していることがわかる。これより Fig. 6 において、FET-HF では最後まで推定が行なえている。つぎに平均二乗誤差についてであるが、まず Fig. 8 のロボットについての誤差から見てみると、FET-HF では逃避時間回避を達成していることにより、誤差も発散していないことがわかる。また各フィルタによる誤差の値を比べてみても、FET-HF による誤差は KF による誤差よりも小さくなっており、FET-HF を用いることにより推定精度が向上したことを確認できる。同様に Fig. 9 のランドマークにおける平均二乗誤差においても、FET-HF を用いた推定では誤差が発散せず、その大きさについても KF と FET-HF を比べると、FET-HF のほうが誤差が小さくなっており推定精度向上を確認できる。

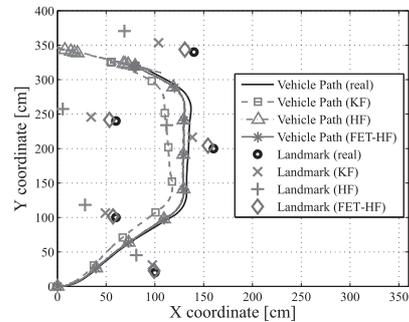


Fig. 6 Estimation results

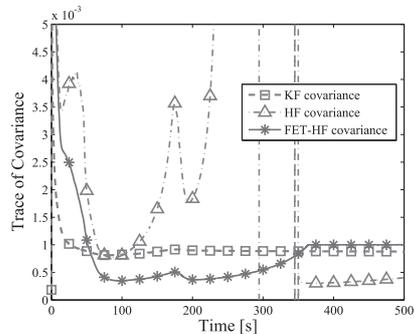


Fig. 7 Estimated error covariances

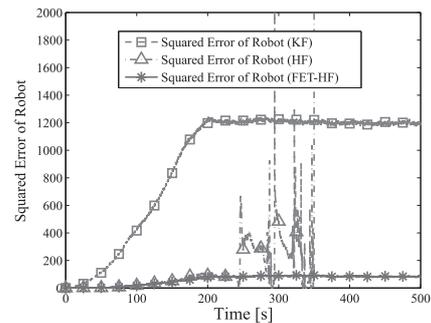


Fig. 8 Squared errors of the robot

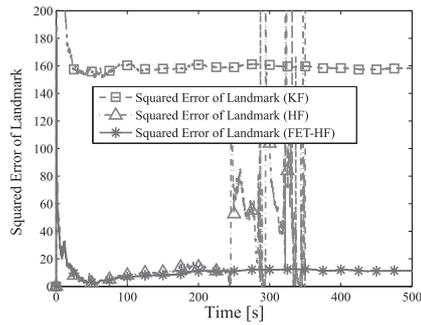


Fig. 9 Squared errors of the landmarks

5. 制御実験による検証

つぎに先ほど行なったシミュレーションプログラムと AmigoBot から得られたデータを用いて制御実験による検証を行なう。

5.1 実験概要

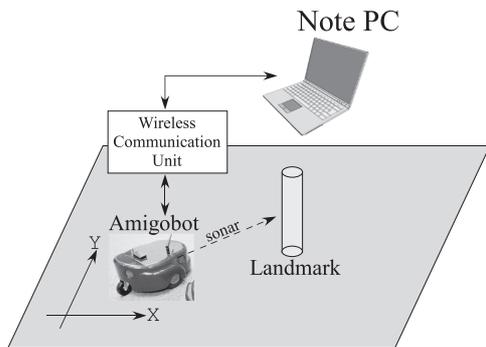


Fig. 10 Experimental setup

まず実験環境について説明する。実験環境を Fig. 10 に示した。移動ロボットには AmigoBot と呼ばれる独立 2 輪駆動型移動ロボットを用いる。無線 LAN により AmigoBot と PC 間でロボットの入力信号やオドメトリデータを送受信し、また、AmigoBot に搭載されたソナーセンサより、ロボットとランドマークの相対距離を観測した。これらのデータをオフラインで取得し、これを利用して Matlab 上で計算を行なうことで実機検証を行なった。一方で、ロボットとランドマークの真値を計測するために、上からカメラで撮影しその映像を解析している。この情報も Matlab 上で計算し、真値と推定値との比較を行なった。今回の実験では推定結果と、ランドマークの平均二乗誤差、誤差共分散を評価する。平均二乗誤差を評価することにより、推定精度の比較検証を行なう。誤差共分散を比較することにより、収束性の検証を行なう。また、ソナーセンサによる観測を行なっているのでつぎの問題が生じる。ロボットの全方向とソナーセンサの相対角度は既知であるが、観測域が広がらないため正確な相対角度を求めることができない。そのため、本稿では相対角度については常に一定の角度の観測値が得られていると仮定して実験を

行なった。

5.2 実験条件

1 台の AmigoBot が 1 つのランドマークを中心に円運動した場合の、ロボットおよびランドマークの推定を実機検証した。実験の概略図を Fig. 11 に示した。観測開始時の、ロボットとランドマークの相対角度を 90 deg であるとし、その後もロボットとランドマークを中心に半径 1 m の円弧に印をつけ、これに沿って AmigoBot を移動させた。

実験におけるパラメータを Table 2 のように設定した。また与えた入力信号を Fig. 12 に示す。

Table 2 Experimental parameters

Parameter[Unit]	Symbol	Value
Sampling time [s]	T	0.1
Number of steps [step]	$SimTime$	286
Initial state of the robot	\mathbf{x}_{R_0}	$[0 \ 0 \ 0]^T$
Landmark position [mm]	(x_l, y_l)	(0, 1132)
Initial error covariance matrix of the robot	\mathbf{P}_{0v}	$10^{-5} \times \mathbf{I}_3$
Initial error covariance matrix of landmarks	\mathbf{P}_{0m}	$10^5 \times \mathbf{I}_2$
Covariance matrix of process noise	\mathbf{Q}	$\begin{bmatrix} 10^{-6} \times \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Covariance matrix of observation noise	\mathbf{R}	$10^{-5} \times \mathbf{I}_2$
Design parameter	γ	16
Design parameter	δ	0.035
Threshold	P_{lim}	0.05

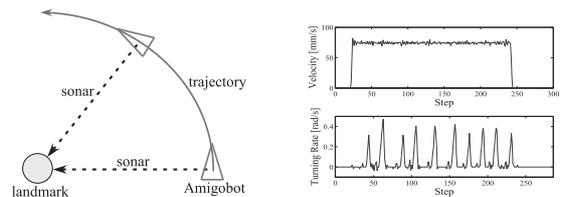


Fig. 11 Experimental overview Fig. 12 Control input

5.3 実験結果

上記のパラメータの下で実験を行なった。その結果は Fig. 13~Fig. 15 のようになり、それぞれロボットの自己位置およびランドマークの位置推定結果、推定誤差共分散行列、ランドマークの位置推定誤差の平均二乗誤差の結果である。ロボットの平均二乗誤差については、カメラのサンプリング時間とロボット内のサンプリング時間を同期させることができなかったので省略した。まず Fig. 13 より本稿で提案した FET-HF を用いた手法でもランドマーク位置およびロボットの軌跡の推定が正しく行なわれていることを確認できる。そして Fig. 14 より、もとの H_∞ フィルタによる推定では、推定誤差共分散が実験開始後すぐ逃避時間が発生していたが、FET-HF を用いることで逃避時間を回避していることを確認できる。そして Fig. 15 より、もとの H_∞ フィルタによる推定では平均二乗誤差が途中で大きな値となっており、推定精度が悪化していたが、本稿で提案した FET-HF による推定結果では平均二乗誤差も途中で大きな値にはならず悪化していないことがわかる。また KF による結果と比べてみても、誤差が減少しており推定精度向上を確認することができる。

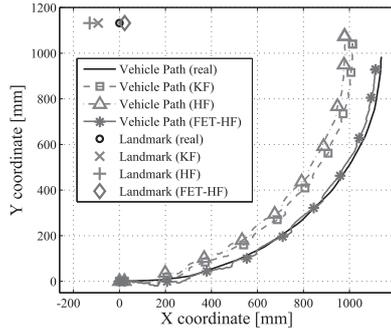


Fig. 13 Estimation results

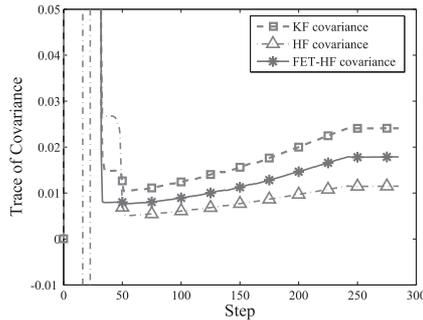


Fig. 14 Estimated error covariances

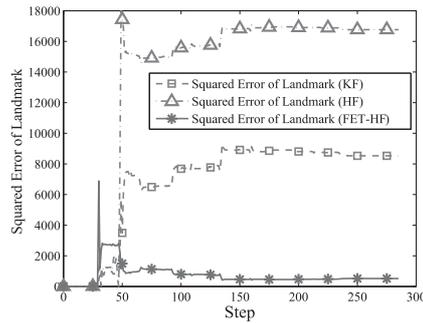


Fig. 15 Squared errors of the landmarks

6. おわりに

本稿では、逃避時間回避を考慮した H_∞ フィルタ (FET-HF) を用いた移動ロボットの自己位置推定と環境認識について検証を行なった。このアルゴリズムでは推定誤差共分散行列の更新式に重み付けをすることによって、その発散を防ぎ、逃避時間回避を達成した。

また収束性の証明として、移動ロボットが静止時に、アルゴリズムの更新につれてその推定誤差共分散行列の行列式が単調減少し、十分時間経過後には誤差共分散行列が 0 に収束することを示した。

さらにシミュレーションと制御実験による検証の結果により、実際に推定誤差共分散行列が発散せずに収束していることから逃避時間回避を達成し、また、ほかのフィルタと比べて推定精度が向上していることを確認した。

本稿では、非線形方程式で与えられる移動ロボットの状態

更新式を線形化して扱っているため、理論的な解析結果は各時刻における動作点近傍周りの誤差収束性評価に限定されている。また推定誤差共分散を収束させるためにはある程度のデータ量と処理時間が必要であるためロボットが高速動作したり、急にカーブしたりするような場合には現手法にはまだ改善の余地があり、今後の課題とさせて頂く。

参考文献

- 1) 上田隆一: 確率ロボティクスの展望, 日本ロボット学会誌, **29**-5, 404/407 (2011)
- 2) H. Durrant-Whyte and T. Bailey: Simultaneous localization and mapping; part 1, *IEEE Robotics and Automation Magazine*, **13**-2, 99/110 (2006)
- 3) J.D. Tardós, J. Neira, P.M. Newman and J.J. Leonard: Robust mapping and localization in indoor environments using sonar data, *International Journal of Robotics Research*, **21**-4, 311/330 (2002)
- 4) M.W.M.G. Dissanayake and S. Huang: Convergence and Consistency Analysis for Extended Kalman Filter Based SLAM, *IEEE Transactions on Robotics*, **23**-5, ●/●(2007)
- 5) G.P. Huang, A.I. Mourikis and S.I. Roumeliotis: On the complexity and consistency of UKFbased SLAM, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Kobe, Japan, 4401/4408 (2009)
- 6) M. Montemerlo, S. Thrun and B. Siciliano: *FastSLAM: a scalable method for the simultaneous localization and mapping problem in robotics*, Springer (2006)
- 7) P. Bolzern, P. Colaneri and G.D. Nicolao: H_∞ differential riccati equations: convergence properties and finite escape phenomena, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**-1, 113/118 (1997)
- 8) J. Seo, M. Yu, C.G. Park and J.G. Lee: An extended robust H_∞ filter for nonlinear constrained uncertain systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54**-11, 4471/4475 (2006)
- 9) H. Ahmad and T. Namerikawa: Robotic Mapping and Localization Considering Unknown Noise Statistics, *Journal of System Design and Dynamics*, **5**-1, 070/082 (2011)
- 10) K.P.B. Chandra, D. Gu and I. Postlethwaite: SLAM using EKF, EH_∞ and mixed EH_2/H_∞ filter, *Proc. IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Yokohama, Japan, 818/823 (2010)
- 11) 片山 徹: 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店 (2000)
- 12) G. Dissanayake, P. Newman, S. Clark, H. Durrant-Whyte and M. Csorba: A solution to the simultaneous localization and map building (SLAM) problem, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **17**-3, 229/241 (2001)
- 13) L.D.L. Perera, W.S. Wijesoma and M.D. Adams: SLAM With Joint Sensor Bias Estimation: Closed Form Solutions on Observability, Error Bounds and Convergence Rates, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **18**-3, 732/740 (2010)
- 14) G. ストラング, 井上: 線形代数とその応用, 産業図書株式会社 (1978)

《付 録》

A. 正定行列の行列式における特性

行列 A, B がそれぞれ正定行列であるとき、その行列式に関して次式が成り立つ¹⁴⁾。

$$|\mathbf{A}| < |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \quad (\text{A.1})$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{A} > \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{A}| > 0 \quad (\text{A.3})$$

B. 補題 2 証明

[Proof] 補題 2 の証明を帰納法を用いて行なう.

1. まず $n = 1$ で

(1) $\text{tr} \mathbf{P}_k^0 < P_{lim}$ の場合

$$\mathbf{P}_k^{1-1} = \mathbf{P}_k^{0-1} + \mathbf{W} \quad (\text{B.1})$$

これより $l = 0, n = 1$ であるときの (41) 式が成り立つ.

(2) $\text{tr} \mathbf{P}_k^0 \geq P_{lim}$ の場合

$$\mathbf{P}_k^{1-1} = \Delta(\mathbf{P}_k^{0-1} + \mathbf{W}) = \Delta \mathbf{P}_k^{0-1} + \Delta \mathbf{W} \quad (\text{B.2})$$

ここで $l_1 = 0$ より以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{1-1} &= \Delta^1 \mathbf{P}_k^{0-1} + (\Delta^1 - 1 + (\Delta - 1)l_1 + 1)\mathbf{W} \\ &= \Delta^1 \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_1 + 1)\mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

よって $l = 1, n = 1$ のときの (42) 式が成り立つ.

以上より $n = 1$ で (41), (42) 式が成り立つ.

2. つぎに $n = i$ で (41), (42) 式が成り立っているとすると,

(1) $n = i - 1$ まで $l = 0$ であり,

(a) $\text{tr} \mathbf{P}_k^i < P_{lim}$ の場合

$$\mathbf{P}_k^{i+1-1} = \mathbf{P}_k^{0-1} + i\mathbf{W} + \mathbf{W} = \mathbf{P}_k^{0-1} + (i+1)\mathbf{W} \quad (\text{B.4})$$

これより $l = 0, n = i + 1$ としたときの (41) 式が成り立つ.

(b) $\text{tr} \mathbf{P}_k^i \geq P_{lim}$ の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{i+1-1} &= \Delta(\mathbf{P}_k^{0-1} + i\mathbf{W} + \mathbf{W}) \\ &= \Delta \mathbf{P}_k^{0-1} + (i+1)\Delta \mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで $l_1 = i$ より以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{i+1-1} &= \Delta^1 \mathbf{P}_k^{0-1} + (\Delta^1 - 1 + (\Delta - 1)l_1 + i + 1)\mathbf{W} \\ &= \Delta^1 \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_1 + i + 1)\mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

よって $l = 1, n = i + 1$ としたときの (42) 式が成り立つ.

(2) $n = i - 1$ までに $l = q$ ($q \neq 0$) であり,

(a) $\text{tr} \mathbf{P}_k^i < P_{lim}$ の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{i+1-1} &= \Delta^q \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_q + i)\mathbf{W} + \mathbf{W} \\ &= \Delta^q \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_q + i + 1)\mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

よって $l = q, n = i + 1$ としたときの (42) 式が成り立つ

(b) $\text{tr} \mathbf{P}_k^i \geq P_{lim}$ の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{i+1-1} &= \Delta(\Delta^q \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_q + i)\mathbf{W} + \mathbf{W}) \\ &= \Delta^{q+1} \mathbf{P}_k^{0-1} + \Delta(d_q + i + 1)\mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ここで $l_{q+1} = i$ より

$$\Delta(d_q + i + 1)$$

$$= \Delta\{\Delta^q - 1 + (\Delta - 1)\sum_{j=1}^q \Delta^{q-j} l_j + i + 1\}$$

$$= \Delta^{q+1} + (\Delta - 1)\sum_{j=1}^q \Delta^{q+1-j} l_j + \Delta l_{q+1}$$

$$= \Delta^{q+1} + (\Delta - 1)\sum_{j=1}^{q+1} \Delta^{q+1-j} l_j + l_{q+1}$$

$$= \Delta^{q+1} - 1 + (\Delta - 1)\sum_{j=1}^{q+1} \Delta^{q+1-j} l_j + i + 1$$

$$= d_{q+1} + i + 1 \quad (\text{B.9})$$

となるので, (B.8) 式は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{i+1-1} &= \Delta^{q+1} \mathbf{P}_k^{0-1} + \Delta(d_q + i + 1)\mathbf{W} \\ &= \Delta^{q+1} \mathbf{P}_k^{0-1} + (d_{q+1} + i + 1)\mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

よって $l = q + 1, n = i + 1$ としたときの (42) 式が成り立つ.

(a), (b) より $n = i + 1$ でも (41), (42) 式が成り立つ.

以上 1, 2 より補題が証明された. \square

[著者紹介]

大川 佳寛



2012 年慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科卒業. 同年同大学大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻に入学.

滑川 徹 (正会員)



1994 年金沢大学大学院自然科学研究科システム科学専攻博士課程中退. 同年金沢大学工学部電気・情報工学科助手. 同講師を経て 2002 年長岡技術科学大学機械系助教授. 2006 年金沢大学大学院自然科学研究科電子情報科学専攻助教授を経て 2007 年同大学理工学研究域電子情報学系准教授. 2009 年より慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科准教授となり現在に至る. ロバスト制御理論, 分散協調制御理論とそのロボティクス応用に関する研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会, IEEE などの会員.