

# 非均一蔵本モデルを用いた送電損失を含む電力ネットワークの同期条件

藤田佑樹 滑川徹 (慶應義塾大学)

## Synchronization Condition of Lossy Power Networks by Using Non-Uniform Kuramoto Model

\*Y. Fujita and T. Namerikawa (Keio University)

**Abstract**— This paper discusses a synchronization problem for networked electrical power systems with a connection topology. We analyze dynamical properties of power networks and derive the synchronization condition of electrical generators. First, a termed Kron reduction method to derive swing equation is employed, which describes states of generators. Second, the equation is reduced to Non-uniform Kuramoto model, and then we derive a synchronization condition by using the reduced model. Finally, we have succeeded in relaxing the synchronization condition by controlling power units. Effectiveness of the proposed condition is shown via simulation results.

**Key Words:** Power Networks, Synchronization, Transient Stability, Non-Uniform Kuramoto Model

### 1 はじめに

電力需給の自動最適化 (Smart Grid) 技術の発達や再生可能エネルギーを用いた発電など、電力ネットワークの複雑化を背景に電力システムの安定性に関して研究が盛んに行われている。この安定度には幾つか種類があり、本論文では過渡安定性に関して議論する。

この過渡安定性を解析するために、多くの手法が現在まで提案されてきた<sup>1)2)</sup>。しかし、これら既存の手法は電力ネットワークを簡略化したモデルで議論している場合があり、また、結果として導かれた安定条件が複雑になってしまい、あるシステムパラメータを持つ電力ネットワークが同期するの否かを議論するのが困難であるという課題がある。

このような背景から、電力ネットワークの過渡安定性を解析する新しい手法が提案されている<sup>3)</sup>。この手法の特徴としては非均一蔵本モデルと呼ばれるモデルを用いている事である。この非均一蔵本モデルは、電力ネットワークと蔵本振動子の両方の特徴を有し、両モデルを結び付け、蔵本モデルの同期条件を電力ネットワークに適用させる役割を持つ。この手法を用いる利点としては、最終的に導かれる同期条件が簡潔である事、同期条件が電力ネットワークの状態や接続形態に関連している事、電力ネットワークを簡略化しないで扱える事などが挙げられる。

本論文では、まず初めに、電力ネットワークを数式化し、縮約と呼ばれる手法を用いる事により動揺方程式と呼ばれる発電機の相対位相変動を表す数式モデルを導く。この方程式を電力ネットワークモデルと呼ぶ。ここで、電力ネットワークに内在する発電機の機械的入力全てはフィードバック制御されている。次に、この電力ネットワークモデルから非均一蔵本モデルを導出する。そして、このモデルに対して同期条件を提案する。本研究が従来の研究と異なる点は、最終的に導出される同期条件が複雑にならないよう発電機の機械的入力を制御している点である。これによって非均一蔵本モデルの利点を損ねることなく従来の同期条件を緩和することが可能である。最後に提案法の同期条件を数値実験にて検証する。

### 2 電力モデルと非均一蔵本モデル

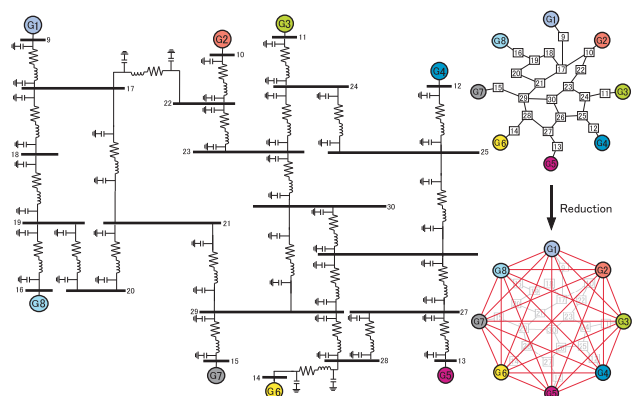
本章では、まず1節で電力ネットワークの動揺方程式を導き、これを電力ネットワークモデルとする。次に2節でそのモデル用いて非均一蔵本モデルを導出する。

#### 2.1 電力ネットワークモデル

一般的に電力システムに内在する  $N$  台ある発電機のうち、 $i$  番目の発電機の動揺方程式は (1) 式で表わす事ができる。ここで、発電機  $i$  の単位慣性定数を  $H_i$ ,  $50[Hz]$  または  $60[Hz]$  で与えられるエリアの基準周波数を  $f$ ,  $f$  の回転座標系からみた位相を  $\delta_i$ , 機械入力を  $P_{m,i}$ , ダンピングを  $D_i$ , 電気出力を  $P_{e,i}$  としており、単位には単位法を用いている。

$$\frac{H_i}{\pi f} \ddot{\delta}_i = P_{m,i} - D_i \dot{\delta}_i - P_{e,i}, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (1)$$

一般的には無数の発電機、変電所、需要家などの動的負荷および送電線によって電力ネットワークは形成されるが、本論文では発電機ノード 8 点と送電線であるバス 22 点で形成している電力ネットワークを制御対象とする。これを Fig.1(a) に示す<sup>4)</sup>。



(a) Connection Topology (b) SL-Diagram  
Fig. 1: Power Grid

Fig.1(a)においてG1-G8はそれぞれ発電機ノードを、B9-B30はそれぞれバスを表している。また、Fig.1(a)の

単線結線 (Single-Line) 図及び縮約の概念図を Fig.1(b) 示す．縮約に関しては本節下部で述べる．

Fig.1 の電力ネットワークに対して，アドミタンス行列を  $Y$  で定義すると，結合している 2 つのバス  $ij$  間を結ぶ送電線はアドミタンス  $Y_{ij} \in \mathbb{C}$  で重み付けする事ができる．また，全てのバスは接地アドミタンス  $Y_{ground-i}$  を通してアースに接続されている．この  $Y_{ground-i}$  が零の場合，そのバス  $i$  を浮遊していると言い，本論文では全てのバスに対し浮遊状態を仮定する．電気回路理論の観点から，この仮定によって全ての内部バスが排除できる事が言え，その結果アドミタンス行列  $Y$  は縮約アドミタンス行列  $Y_{red}$  となる．この縮約過程は *Kron* 縮約もしくは単に連続した浮遊ノードの消去と言う．

この縮約に伴うアドミタンス行列の変化を縮約式として以下で一般的に示す．まず，アドミタンス行列が  $Y \subset \mathbb{C}^{(N+M) \times (N+M)}$  で与える事ができる，発電機  $N$  台とバス  $M$  本から構成される電力ネットワークを考える．ここで電力ネットワークを構成するバスのうち， $k$  番目のバスに着目し，このバスを消去すると，残された発電機  $N$  台およびバス  $M-1$  本で構成される電力ネットワークのアドミタンス行列は  $Y' \subset \mathbb{C}^{(N+M-1) \times (N+M-1)}$  で与える事ができる．この消去後のアドミタンス行列の  $ij$  成分  $Y'_{ij}$  は消去前のアドミタンス行列  $Y_{ij}$  を用いて次式で表わす事ができる．

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{ik}Y_{jk}}{Y_{kk}}, \quad i, j \in \{1, \dots, N-1\} \quad (2)$$

この縮約式を用いて全ての内部バスを消去する事により，縮約アドミタンス行列  $Y_{red}$  は与えられ，この行列によって各発電機間の関連性が明確になる．そこで，この行列の要素  $Y_{red, ij}$  が各発電機間の相互コンダクタンス  $G_{ij}$  およびサセプタンス  $B_{ij}$  を用いて  $G_{ij} + jB_{ij}$  で表わす事が可能である事に留意すると，電気的出力  $P_{e,i}$  を表す事ができる．ここで，発電機  $i$  の電圧を  $E_i$  としている．

$$P_{e,i} = - \sum_{j=1}^N E_i E_j \{ G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \} \quad (3)$$

動揺方程式 (1) 式および電気的出力 (3) 式を用いることで電力ネットワークの相対位相変動を表す数式モデルを与える事ができる．

$$\frac{H_i}{\pi f} \ddot{\delta} = P_{m,i} - K_{P,i} \dot{\delta} - D_i \dot{\delta} - E_i^2 G_{ii} - \sum_{j \neq i}^N E_i E_j |Y_{ij}| \sin(\delta_i - \delta_j + \varphi_{ij}) \quad (4)$$

ここで， $\varphi_{ij} := \tan^{-1}(G_{ij}/B_{ij}) \in [0, \frac{\pi}{2})$ ， $|Y_{ij}| := \sqrt{G_{ij}^2 + B_{ij}^2}$  ( $> 0$ ) である．また，機械入力  $P_{m,i}$  が比例制御されているとし，比例ゲイン  $K_{P,i}$  を用いて  $P_{m,i} - K_{P,i} \dot{\delta}$  としている．電気出力は  $i = j$  の場合， $E_i^2 G_{ii}$  という値となり，内部損失を表している．これは以下で非均一蔵本モデルを扱うときに総和から外す必要があるため，この段階で外している．本論文では (4) 式を電力ネットワークモデルと呼ぶ．

## 2.2 非均一蔵本モデル

本節では電力ネットワークモデル (4) 式を数学的観点で扱う．そして，電力ネットワークの性質を失わない事，振動系を扱うモデルとして有名な蔵本モデルとして近似的に扱える事の 2 点に留意しながら数式展開をしていく事で，蔵本モデルとして部分的に扱える電力ネットワークモデルを導く．これが非均一蔵本モデルである．この非均一蔵本モデルによって，電力ネットワークを振動系として扱い，解析する事が可能となり，最終的には同期条件が求まる．

まず初めに電力ネットワークモデル (4) 式に対して，電気的損失を排除した実質的機械入力による回転子の固有振動数  $\omega_i$ ，発電機ノード間の電力によって決定される各回転子への影響  $P_{ij}$ ，特異摂動パラメータ  $\varepsilon$ ，電力ネットワークの収束決定要因  $F_i$  を定義する．

$$\omega_i := P_{m,i} - E_i^2 G_{ii} \quad (5)$$

$$P_{ij} := E_i E_j |Y_{ij}| \quad (6)$$

$$\varepsilon := \frac{H_{max}}{\pi f (D_{min} + K_{min})} \quad (7)$$

$$F_i := \frac{(D_i + K_{P,i}) / (D_{min} + K_{min})}{H_i / H_{max}} \quad (8)$$

この定義を用いると，(4) 式を (9)-(10) 式とすることができる．

$$\dot{\delta}_i := \Omega_i \quad (9)$$

$$\varepsilon \dot{\Omega}_i = -F_i \Omega_i + \frac{F_i}{D_i + K_{P,i}} \left\{ \omega_i - \sum_{j \neq i}^N P_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j + \varphi_{ij}) \right\} \quad (10)$$

ここで， $\varepsilon \dot{\Omega}_i \rightarrow 0$  とすることで，(9)-(10) 式から次式を得る．

$$(D_i + K_{P,i}) \dot{\delta}_i = \omega_i - \sum_{j \neq i}^N P_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j + \varphi_{ij}) \quad (11)$$

この (11) 式を本論文では非均一蔵本モデルと呼ぶ．ここで，一般的な蔵本モデルは次式として知られている． $K$  は結合強度と呼ばれるパラメータである．

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (12)$$

したがって，非均一蔵本モデルと蔵本モデルの異なる点は主に 3 点あり，角速度が各発電機  $i$  の固有の値  $(D_i + K_{P,i})$  倍されている点，正弦波の係数が  $P_{ij}$  となっており，一定ではない点， $\varphi_{ij}$  が位相差に加わっている点の 3 点である．つまり，非均一蔵本モデルは蔵本モデルと比較して，振動系システムを構成する各ノードに依存する要素が多く，そのため均一ではないモデルとなっている．

## 3 同期条件と初期条件

本章では電力ネットワークモデルと非均一蔵本モデルに関して得た，本論文の主な結果を述べる．結果として，電力ネットワークに対しては補題 1<sup>5)</sup> と定理 1 が成立する．ただし， $R$  はノード間の実効抵抗<sup>6)</sup>， $D'_i = (D_i + K_{P,i}) / (D_{max} + K_{max})$  である．

補題 1 <sup>5)</sup> 同期条件式を (13) 式, 初期条件式を (14)-(15) 式のように定義する.

$$\frac{2E^2}{R} > \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D'_i} - \frac{\omega_j}{D'_j} \right\} \quad (13)$$

$$\theta(0) \in [0, \pi/2 - \gamma] \quad (14)$$

$$\gamma = \sin^{-1} \left( \frac{R}{2E^2} \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D'_i} - \frac{\omega_j}{D'_j} \right\} \right) \quad (15)$$

(13)-(15) 式が成り立つとき, 非均一蔵本モデル及び電力モデルに関してそれぞれ (A) 位相固定, (B) 角周波数同調, (C) 近似誤差が成立する. これらの詳細に関しては以下の定理 1 を参照されたい.

補題 1 に対し, 送電損失を考慮すると定理 1 が成立する. ただし,  $D'' = (D_{\max} + K_{\max}) / (D_{\min} + K_{\min})$  である.

定理 1 同期条件式を (16) 式, 初期条件式を (14), (17) 式のように定義する.

$$\cos(\varphi_{\max}) > \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D'_i} - \frac{\omega_j}{D'_j} \right\} \frac{R}{2E^2} + D'' \sin(\varphi_{\max}) \quad (16)$$

$$\gamma = \sin^{-1} \left( \frac{R}{2E^2 \cos(\varphi_{\max})} \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D'_i} - \frac{\omega_j}{D'_j} \right\} + D'' \tan(\varphi_{\max}) \right) \quad (17)$$

(14), (16)-(17) 式が成り立つとき, 非均一蔵本モデル及び電力モデルに関して以下の (A)-(C) が保証される.

非均一蔵本モデル

(A) 位相固定:  $\max_{\{i,j\}} |\theta_i - \theta_j| \leq \pi/2 - \gamma$

(B) 角周波数同調:  $\dot{\theta}_{\min}(0) \leq \dot{\theta}_{\infty} \leq \dot{\theta}_{\max}(0)$

電力ネットワークモデル

(C) 近似誤差: 非均一蔵本モデルとの近似誤差は以下の値で抑える事ができる. ただし, 添字  $P$  は電力ネットワークモデル,  $N$  は非均一蔵本モデルを表す.

$$\theta_P(t) - \theta_N(t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0 \quad (18)$$

証明 1 蔵本モデルの同期条件を適用する事で, 定理 1 の同期条件は与えられる. (11) 式における結合強度は (19) 式となり, また, 固有振動数は (20) 式となる.

$$\sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \cos(\varphi_{ij}) - \sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \sin(\varphi_{ij}) \quad (19)$$

$$\max_i \frac{\omega_i}{D_i} - \min_j \frac{\omega_j}{D_j} = \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D_i} - \frac{\omega_j}{D_j} \right\} \quad (20)$$

したがって, 蔵本モデルの同期条件を非均一蔵本モデルに適用すると同期条件は次式で与える事ができる.

$$\sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \cos(\varphi_{ij}) - \sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \sin(\varphi_{ij}) > \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D_i} - \frac{\omega_j}{D_j} \right\} \quad (21)$$

ここで以下の不等式が成立する事に留意すると, (21) 式から同期条件が導出する事ができる. また, 元の (21) 式の間 (22)-(23) 式を挟んでいるので, 定理 1 の同期条件に関して保守性も保証している.

$$\sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \cos(\varphi_{ij}) \geq N \frac{P_{\min}}{D_{\max}} \cos(\varphi_{\max}) \quad (22)$$

$$N \frac{P_{\max}}{D_{\min}} \sin(\varphi_{\max}) \geq \sum_j \frac{P_{ij}}{D_i} \sin(\varphi_{ij}) \quad (23)$$

注意 1 次に実効抵抗に関して述べる. 電力ネットワークを無向結合のグラフと考え, アドミタンス行列を非均一に重み付けされたグラフラプラシアン  $L$  とすると, 電力ネットワークにおいてノード  $ij$  間の実効抵抗  $R_{ij}$  は次式で表わす事ができる.

$$R_{ij} := (e_i - e_j)^T L^\dagger (e_i - e_j) = L_{ii}^\dagger + L_{jj}^\dagger - 2L_{ij}^\dagger \quad (24)$$

ここでノード数を  $N$  とすると,  $e_i$  は  $e_i \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  であり,  $i$  番目の成分が 1, それ以外の成分は 0 の列ベクトルである. また  $L^\dagger$  は  $L$  のムーア-ペンローズの擬似逆行列である.  $L^\dagger$  が対称であり, 定義より  $R_{ii} := 0$  であるので, 実効抵抗行列  $R$  もまた対称行列である. この実効抵抗行列はグラフの接続形態や距離などの性質を反映しているため, 過去の研究で  $R, L$  そして  $L^\dagger$  に関して多くの興味深い結果をもたらしてきた. 特に興味深い結果としては, ノード数  $N$  が  $\infty$  の場合実効抵抗  $R_{ij}$  は一定値  $R$  に収束していくという結果 <sup>7)</sup> であり, この値を同期条件 (13), (16) 式で用いている.

次に, 提案法の同期条件と従来条件を比較する事で同期条件の緩和が達成されている事を確認する. 同期条件の導出方法および送電損失  $\varphi_{ij}$  が与える同期条件への影響から, 送電損失を零とした場合, つまり  $\varphi_{ij} = 0$  とした場合でもこの比較は可能である. そこで, 簡単のため送電損失を零とした場合で比較する. 比較に際し, 異なる部分を明らかにするべく, 同期条件式の左辺の形を揃えた式が以下である. (25) 式が提案法, (26) 式が従来法 <sup>3)</sup> である.

$$\frac{2E^2}{RD_{\max}} > \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D'_i D_{\max}} - \frac{\omega_j}{D'_j D_{\max}} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{2E^2}{RD_{\max}} > \max_{\{i,j\}} \left\{ \frac{\omega_i}{D_i} - \frac{\omega_j}{D_j} \right\} \quad (26)$$

提案法の同期条件と従来法の同期条件の違いは, 明らかにダンピングの部分のみであり,  $D'_i D_{\max} \leftrightarrow D_i$  となっている. ここで, 提案法の  $D'_i D_{\max}$  はゲイン  $K_{P,i}$  を含んでいる. したがって, このゲイン  $K_{P,i}$  は限度があるものの可変であるため, 提案法は従来法の同期条件を緩和した条件である事がわかる. 集合の観点から解釈すると,  $D \subset D' D_{\max}$  であるのは明らかなので, 従来法  $\subset$  提案法である事も明らかとなる. また, 当然ではあるが,  $K_{P,i} = 0 \forall i$  とすると, 提案法の (25) 式は従来法の (26) 式と等しくなる事も確認できる.

## 4 数値実験による検証

本章ではシミュレーションによって提案法の妥当性を検証する．Fig.1の電力システムに同期条件，初期条件を満たすようなパラメータを与え，発電機の位相変動を数値実験した結果を Fig.2(a) に示す．ここで，内側の点列は Fig.1 の全発電機の位相を XY 平面上に投影した（電力ネットワークモデルに従う）点であり，Fig.1-2の点の色は対応している．また，外側の点列は内側にある同色発電機の近似位相を示しており（非均一蔵本モデルに従う），全て固定座標系での数値実験である．Fig.2(b) は条件を満たしていない場合の数値実験結果である．Fig.2 から定理 1 に関する妥当性，特に位相に関する妥当性を視覚的に確認できる．

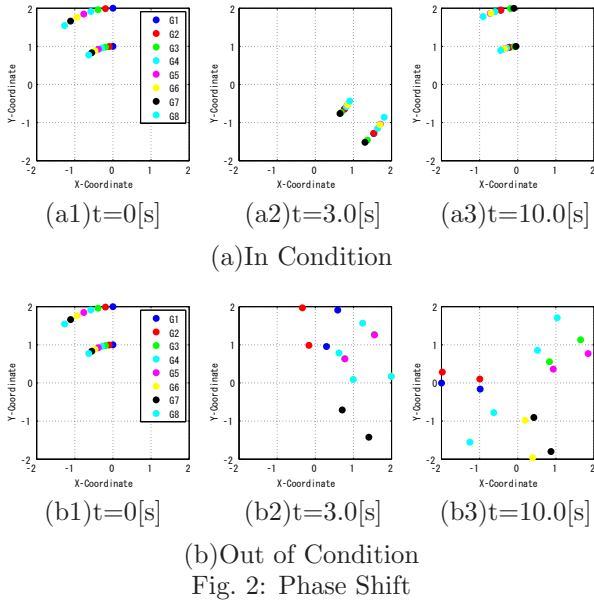


Fig. 2: Phase Shift

次に角周波数同調に関して確認する．同期条件を満たしている場合のシミュレーション結果を Fig.3(a) に，満たしていない場合の結果を Fig.3(b) に示す．

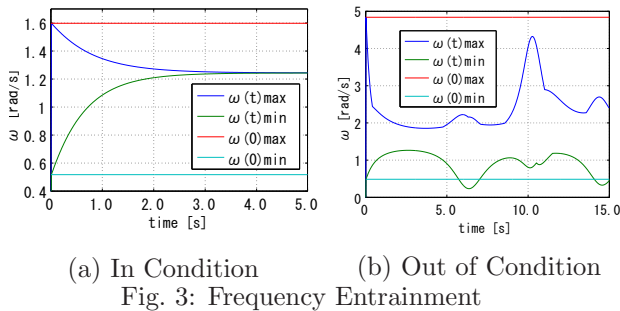


Fig. 3: Frequency Entrainment

Fig.3(a) では，最大角周波数および最小角周波数が，最大初期角周波数と最小初期周波数の間に収束している事が確認できる．これはつまり， $\theta_{min}(0) \leq \theta_{\infty} \leq \theta_{max}(0)$  を満たしているという事であり，すなわち角周波数同調を達成しているという事である．一方，Fig.3(b) では角周波数同調を達成できていない事がわかる．したがって，定理 1(B) に関する妥当性を確認できた事になる．

最後に近似誤差に関する数値実験結果を Fig.4 に示す．Fig.4(a) は条件を満たす場合，Fig.4(b) は満たさない場合の結果である．ただし， $\Delta\theta = \theta_P - \theta_N$  である．

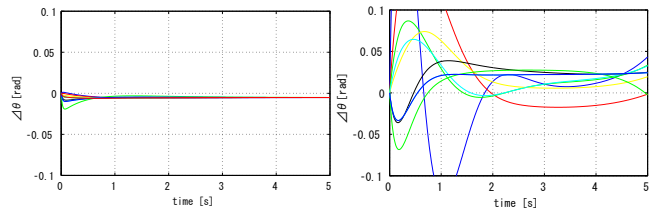


Fig. 4: Approximation Error

本論文では，近似誤差を  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  で抑えられているかどうかで近似の可否を決定している．電力システムに与えたパラメータおよび日本，米国など多くの国と地域で基準周波数が  $50[Hz]$  または  $60[Hz]$  である事を考慮すると，近似誤差が  $10^{-1}$  で抑えられていれば本論文では近似が達成可能であると評価する事になる．したがって，条件を満たす場合 (Fig.4(a)) は近似が達成されており，満たさない場合 (Fig.4(b)) は近似はできていないという結果が Fig.4 から確認できる．以上から定理 1 の (C) に関する妥当性が確認できる．

## 5 おわりに

本論文では，スマートグリッド技術の発達および再生可能エネルギーを用いた発電機の大量導入など，近未来において想定される電力ネットワークの複雑化に伴う電力安定供給問題を背景に，簡略化していない電力システムの同期問題を扱った．

縮約，実効抵抗，非均一蔵本モデルの考え方に基づいて電力ネットワークをモデル化し，解析を行い，結果として同期条件 (16) 式および初期条件 (17) 式を提案した．この提案法の主な利点としては，非均一蔵本モデルを用いるメリットを損なう事なく制御理論を適用した事，またそれによる同期条件の緩和である．この提案法の妥当性に関する検証結果はシミュレーションにて示しており，Fig.2 は位相固定に関して，Fig.3 は角周波数同調に関して，Fig.4 は近似誤差に関してそれぞれ示している．

## 参考文献

- 1) H.-D. Chiang, *Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems*, A John Wiley and Sons, Inc., Publication, (2011)
- 2) F. H. J. R. Silva, L. F. C. Alberto, J. B. A. London Jr, and N. G. Bretas, Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol.52, No.1, 222/229 (2005)
- 3) F. Dörfler and F. Bullo, Synchronization and Transient Stability in Power Networks and Non-Uniform Kuramoto Oscillators, in *Proceeding American Control Conference*, 930/937 (2010)
- 4) Y. Susuki, I. Mezić and T.Hikihara, Coherent Swing Instability of Power Grids, *Journal of Nonlinear Sci*, SpringerLink, (2011)
- 5) 藤田佑樹 滑川徹, 非均一蔵本モデルを用いた電力ネットワークの同期条件に関する考察, 第 55 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, 59/60 (2011)
- 6) P. Barooah and J. Hespanha, Graph Effective Resistance and Distance Control: Spectral Properties and Applications, in *Proceeding IEEE Conference on Decision and Control*, 3479/3485 (2006)
- 7) G. Korniss, Scaling in small-world resistor networks, *Physics letters A*350, 324/330 (2006)