

# 初期状態の不確かさを考慮した $H_\infty$ DIA 制御系設計と その磁気浮上システムへの応用

長岡技術科学大学 滑川 徹  
金沢大学 藤田 政之

## $H_\infty$ DIA Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties for Magnetic Suspension Systems

Toru NAMERIKAWA, Nagaoka University of Technology  
Masayuki FUJITA, Kanazawa University

**Abstract:** This paper deals with a generalized  $H_\infty$  DIA control attenuating initial-state uncertainties. An  $H_\infty$  control problem, which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) control for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed DIA problem supplies  $H_\infty$  controls with good transients and assures  $H_\infty$  controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a necessary and sufficient condition of the generalized  $H_\infty$  DIA problem. Furthermore we apply this proposed method to a magnetic suspension system, and evaluate an attenuation property of the proposed generalized  $H_\infty$  DIA control approach via experiments.

### 1 はじめに

従来の  $H_\infty$  制御問題の枠組みでは制御対象の初期状態はゼロと仮定して理論展開されてきたが、実システムにおいては初期状態はゼロである保障がない。初期状態がノンゼロである場合には  $H_\infty$  制御の過渡応答特性が劣化する場合がある。これに対して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  制御問題 ( $H_\infty$  DIA 制御問題) は従来の外乱減衰特性のみを考慮した  $H_\infty$  制御に比べて良好な過渡特性を付加するものと思われる。近年盛んに切替制御に関する研究が行なわれているが、このアプローチは切替補償器の有効な実装法と期待される。

外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御問題については、まず有限時間の場合の一般化  $H_\infty$  制御問題に対する解が得られ [1, 2]、さらにこの問題は無限時間の外乱と初期状態の混合減衰問題へと拡張された [3, 2]。文献 [3] で議論されているのは直交条件を含む制御対象に限定されていた [4, 5]。実システムに本手法を応用するには、この条件は厳しいもので、制御系設計の自由度がかなり制約を受け、実用上十分でない [6]。そこで文献 [7] では従来の結果から直交条件を外して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間  $H_\infty$  DIA 制御問題を定式化し、可解条件の必要十分条件を導出し、さらに1つの具体的な制御方を提示した。

本稿では文献 [7] のアプローチを用いて、磁気浮上システムに対して制御系設計を行い、文献 [7] の特性を実験的に検証することを目的とする。具体的には、初期状態の不確かさ  $x_0(t=0)$  における状態  $x \neq 0$  に対する重み行列  $N$  と設計されたロバスト補償器の周波数特性を解析し、それらが制御実験に与える影響について検証と考察を行なう。これにより、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御の有用性を確認する。

### 2 問題設定

$t \in [0, \infty)$  で定義される以下の線形時不変システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} w \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $x \in R^n$  は状態で  $x_0 = x(0)$  は初期状態<sup>1</sup>;  $u \in R^r$  は

<sup>1</sup>一般性を失うことなく  $x_0$  は初期状態の不確かさとして扱うことが出来る、 $x_0 = 0$  を既知の初期状態とすることが出来る。

制御入力;  $y \in R^m$  は観測出力;  $z \in R^q$  は被制御量;  $w \in R^p$  は外乱であり、 $w(t)$  は区間  $[0, \infty)$  において2乗可積分な関数 ( $w \in L^2[0, \infty)$ ) とする。ここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく [5]。

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$  は適当な次元を有する定数行列であり、以下の条件を満たすものとする。

- $(A, B_1)$ : 可制御       $(A, C_1)$ : 可観測
- $(A, B_2)$ : 可制御       $(A, C_2)$ : 可観測
- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$ : 正則
- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$ : 正則

システム (1) に対して、すべての許容制御則  $u(t)$  が以下の線形時不変システムで与えられ、(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{u} &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\zeta(t)$  はコントローラの状態であり、有限次元を持ち、 $J, K, G, H$  は適切な次元を持つ定数行列である。

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の  $H_\infty$  DIA 制御問題を考える。

#### 問題 1 $H_\infty$ DIA 制御問題

$N > 0$  が与えられたときに、すべての  $w \in L^2[0, \infty)$  とすべての  $x_0 \in R^n$  (ただし  $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して  $z$  が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ。

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を  $H_\infty$  DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ。

初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す。行列不等式の意味でより大きな  $N$  を選ぶことは、初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する。

### 3 $H_\infty$ DIA 制御

DIA 制御は初期状態が既知である場合 ( $x_0 = 0$ ) にはある  $H_\infty$  制御になる．このことにより DIA 制御もそれに類似した制御則の構造を持つ．まず以下の所謂 2-Riccati 条件を考える．

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で，解  $M > 0$  が存在する．

$$\begin{aligned} & M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ & + (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ & - M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ & + C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで以下の行列は安定である．

$$\begin{aligned} & A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 \\ & - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M \end{aligned} \quad (5)$$

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で，解  $P > 0$  が存在する．

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ & + P(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ & - P(C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ & + B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで以下の行列は安定である．

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1 \end{aligned} \quad (7)$$

(A3)  $\rho(PM) < 1$

ここで  $\rho(X)$  は行列  $X$  のスペクトル半径を表し， $\rho(X) = \max |\lambda_i(X)|$  である．

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる．

補題 1 [7] システム (1) に対して，仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする．このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラはすべての外乱  $\forall w \in L^2[0, \infty)$  とすべての初期状態  $\forall x_0 \in R^n$  (ただし， $(w, x_0) \neq 0$ ) に対して

$$\|z\|_2^2 \leq \|w\|_2^2 + x_0^T P^{-1} x_0 \quad (8)$$

を満たす．ここでセントラルコントローラは以下で与えられる．

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \\ \dot{\zeta} &= A\zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ & \quad + (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

明らかにこの補題は (A2) の Riccati 解  $P$  に関するものであり， $N$  の条件になっていない．そこで以下の不等式を考えてみる．

(A4)  $N < P$ , ( $N^{-1} > P^{-1}$ ).

もし (A4) が満たされるならば，不等式 (8) により，明らかに不等式 (3) が成り立つ．つまりセントラルコントローラ (9) が DIA 制御となる． $N$  は初期状態の不確かさの指標として扱うことが出来るため，もし初期状態の不確かさが十分に小さいならば，つまり (A4) が満たされるならば，セントラルコントローラは初期状態の不確かさに対してロバスト性を有することになる．上記の議論により，仮定 (A4) はセントラルコントローラが DIA 制御であるための必要条件のようにも見えるが，真の必要十分条件を示すために以下の仮定を導入する．

(A5)  $Q + N^{-1} - P^{-1} > 0$ ,

ここで  $Q$  は以下の Riccati 方程式の最大解である．

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & \quad + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1}) \\ & \quad + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & \quad + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1})^T Q \\ & - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & \quad \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ & = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで  $L := (I - PM)^{-1}$ .

定理 1 [7] システム (1) に対して仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つとする．このとき  $H_\infty$  セントラルコントローラ (9) が DIA 制御であるための必要十分条件は条件 (A5) を満たすことである．

### 4 システム構成と数学モデル

実験装置である磁気浮上システムの構成図を Fig.1 に示す．電磁石が実験装置の上部に設置されており，制御目的は電磁力を制御することにより浮上体（鉄球）を空中に安定に非接触支持することである<sup>2</sup>．

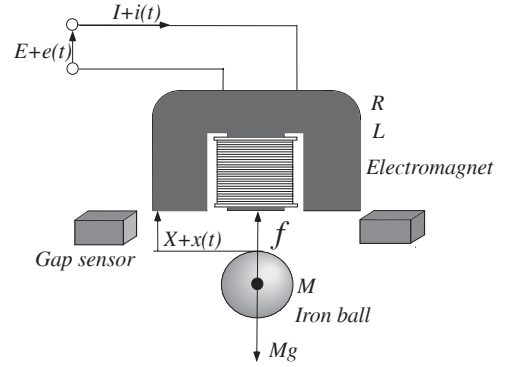


Fig. 1: Magnetic Suspension System

定常状態での妥当な仮定 [6,7] のもとで，このシステムは以下の状態方程式で記述される．

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\ y_g &= C_g x_g + w_0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $x_g := [x \ \dot{x} \ i]^T$ ,  $u_g := e$ ,  $v_0 := [v_m \ v_L]^T$ ,

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2670 & 0 & -23.3 \\ 0 & 0 & -31.6 \end{bmatrix}, \quad B_g = [0 \ 0 \ 3.33]^T$$

$$C_g = [1 \ 0 \ 0], \quad D_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.50 & 0 \\ 0 & 3.33 \end{bmatrix}$$

ただし  $x(t)$ : 浮上体の変位,  $i(t)$ : 電流,  $u_g(t) = e(t)$ : 制御入力 (電磁石電圧),  $v_m(t)$ ,  $v_L(t)$ : 外乱, ノイズ,  $w_0(t)$ : センサノイズや不確かさの影響, である．

制御対象 (11) において ( $A_g$ ,  $B_g$ ) および ( $A_g$ ,  $D_g$ ) は可制御, また ( $A_g$ ,  $C_g$ ) は可観測である．

<sup>2</sup>浮上体の質量  $M$  は 286[g] であり，定常浮上位置 (ギャップ長)  $X$  は 3[mm] と設定している．

## 5 制御系設計

### 5.1 一般化プラントの構成と問題設定

まずシステム外乱  $v_0(t)$  と  $w_0(t)$  に関して考察する． $v_0$  は入力への外乱で，低周波帯域で影響を及ぼす．また  $w_0$  は出力外乱，およびモデルの不確かさを表す．そこで重み関数  $W_v$  および  $W_w$  を導入し  $v_0, w_0$  を以下のように表す．

$$v_0 = W_v(s) w_2 \quad (12)$$

$$W_v = \Phi C_w (sI - A_w)^{-1} B_w, \quad \Phi = [1 \quad 1]^T$$

$$w_0 = W_w w_1 \quad (13)$$

つぎに被制御量について考慮する．本研究では第1目的が浮上体の非接触支持であるため，ギャップ長  $x(t)$  とその微分値  $\dot{x}(t)$  にレギュレーションのために行列  $\Theta$  で重み付けし，被制御量  $z_1$  を以下のように定義する．同様に制御入力のレギュレーションのためにスカラー  $\rho$  で重み付けした被制御量  $z_2$  を定義する．

$$z_g = F_g x_g, \quad F_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_1 \quad \theta_2] \\ z_2 &= \rho u_g \end{aligned} \quad (15)$$

最終的には一般化プラントを (16) のように構成する<sup>3</sup> [5]．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \\ C_2 &= [C_g \quad 0], \quad D_{21} = [W_w \quad 0] \end{aligned}$$

ここで  $x := [x_g^T \quad x_w^T]^T$  であり， $x_w$  は  $W_v(s)$  の状態である．また  $w, z$  を， $w := [w_1^T \quad w_2^T]^T$ ， $z := [z_1^T \quad z_2^T]^T$  と構成した．

制御目的は外乱  $w$  から出力  $z$  への影響を抑制し，さらに初期状態  $x(0)$  の不確かさが出力  $z$  へ及ぼす影響を減衰させることである．制御問題を以下のように定義する．

制御問題：(16) に対して DIA 条件 (3) を達成する，許容コントローラ  $K(s)$  を見つけよ．

### 5.2 $H_\infty$ DIA コントローラ

制御問題に対する解を得るため MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって設計パラメータを以下のように選定した<sup>4</sup>．

$$\begin{aligned} W_v(s) &= \frac{2.0 \times 10^4}{s + 0.010} \\ W_w &= 0.40 \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.10 & 0 \\ 0 & 0.00010 \end{bmatrix} \\ \rho &= 1.0 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (17)$$

これによって，コントローラ  $K_{DIA1}$  が直接的に得られる．ここでコントローラの次数は4次である． $K(s)$  の周波数応答を Fig.2 に実線で示す．条件 (A5) を満たす最大の行列  $N$  を計算する際に簡単のため  $N$  の構造を以下のように限定する<sup>5</sup>．

$$N = nI \quad (18)$$

<sup>3</sup> この一般化プラントには直交条件が課されていない．

<sup>4</sup>  $W_w$  は周波数関数と選ぶことも出来るが簡単のため定数とした．

<sup>5</sup> 正定行列  $N$  の構造を限定するのは解析後の評価を容易にするため．

ただし  $n$  は正のスカラーで  $I$  は適当な次数を持つ単位行列とする．このとき重み行列  $N$  の最大値は  $5.256980 \times 10^{-3} \times I_4$  であった．

Fig.2 で  $K(s)$  は低周波帯域でハイゲインを，高周波帯域で良好なロールオフ特性を有する PID 型応答を示している．従来の DIA 制御の設計の枠組みではコントローラに積分特性を持たせることが困難であった [3,6]．

### 5.3 重み行列 $N$ の役割に関する検討

不確かな初期状態  $x_0$  に対する重み行列  $N$  は初期状態の不確かさの抑制と外乱の抑制の相対的な重要性の指標と成り得る． $N$  を大きく選ぶことは行列不等式の意味で初期状態の不確かさの影響をより抑制する許容コントローラを選ぶという意味を持つ (ここではスカラー  $n$  として扱う)．初期状態の不確かさの影響をより抑制することにより，過渡応答性能向上が期待される [2]．

重み行列  $N$  に対するフィードバック性能の検証のため，前節の設計パラメータを変更し，別の  $H_\infty$  DIA コントローラを設計した．ここでは状態  $x_g$  のレギュレーションに重要な役割を果たすパラメータ  $\Theta$  に着目し，その中でも特に状態  $x_g$  の中で，浮上体の位置に対する重み係数である  $\theta_1$  を変更し，それに伴う4つのコントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  を設計した．ここで比較のため，その他の設計パラメータ  $W_v(s), W_w, \theta_2, \rho$  は不変とした．

この結果を Table 1 に示す．また得られた4つのコントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の周波数応答を Fig.2 にそれぞれ実線，鎖線，一点鎖線，点線で示す．Fig.2 と Table 1 より，重み係数  $\theta_1$  が大きい程，コントローラの高周波ゲインが大きくなり，それに伴い， $n$  の値が大きい傾向があることが分かる．

Table 1:  $H_\infty$  DIA Controllers and their properties

Controller	$\theta_1$	$n$	Line style in Fig.2
$K_{DIA1}$	1.10	$5.256980 \times 10^{-3}$	solid line
$K_{DIA2}$	0.80	$5.223575 \times 10^{-3}$	dashed line
$K_{DIA3}$	0.50	$5.202185 \times 10^{-3}$	dash-dot line
$K_{DIA4}$	0.30	$5.193773 \times 10^{-3}$	dotted line

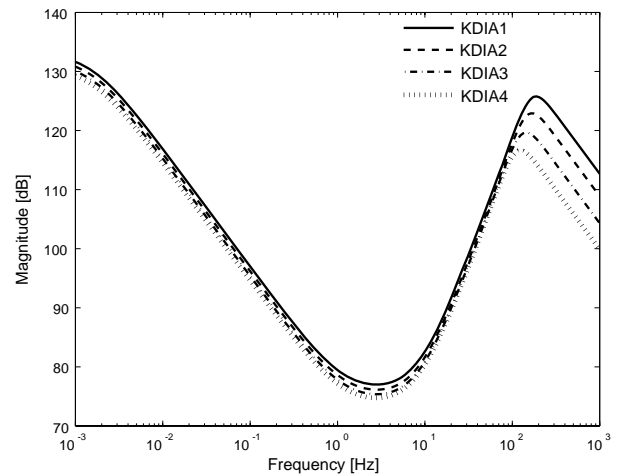


Fig. 2: Frequency Responses of DIA Controllers

(注意1) :  $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 > 1.1$ ) と選ぶと制御実験において応答が振動的になり，更に大きくすると制御系が安定性を失う．

(注意2) :  $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 < 0.3$ ) と選ぶと Fig.2 におけるコントローラの周波数応答は高周波領域だけでなく，全周波数帯域でゲインが下がる．その結果，後述する制御実験において，( $0.3 \leq \theta_1 \leq 1.1$ ) における特性，傾向と異なる性質を示す．

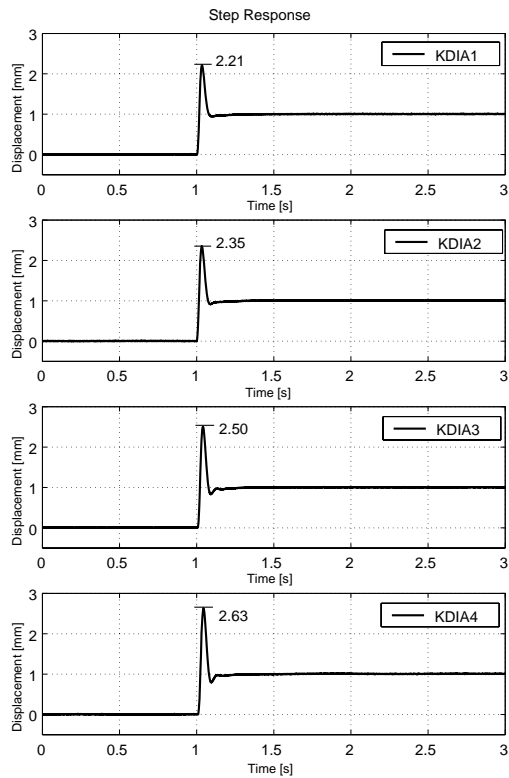


Fig. 3: Step Responses

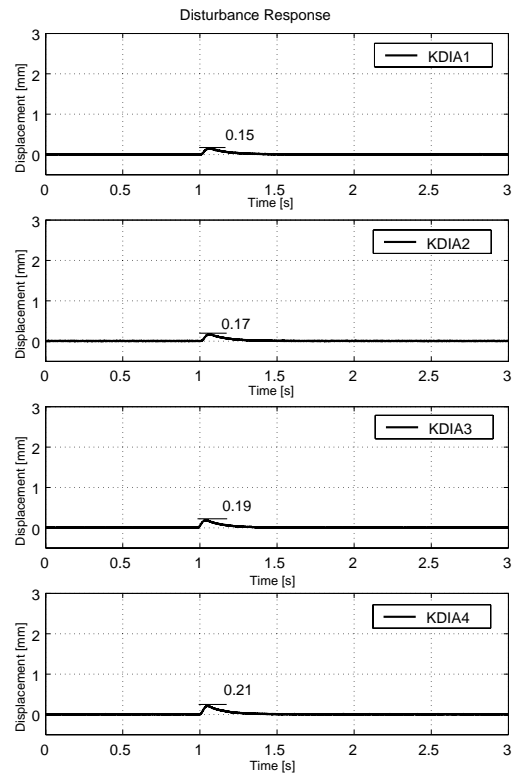


Fig. 4: Disturbance Responses

## 6 制御実験による検証と考察

コントローラ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の特性を検証するために制御実験を行った．まず全てのコントローラを用いて制御系は安定性を保持した．つぎに本稿での目的である過渡応答性能（初期状態の不確かさに対する応答）を確認するためにステップ状の目標値信号を与え，応答を確認した．ここでステップ信号の大きさは  $1[\text{mm}]$  とした．実験結果を Fig.3 にそれぞれ  $K_{DIA1} \sim K_{DIA4}$  の順に上から示す．4つの応答では，整定時間がほぼ同じであるが，オーバーシュートの大きさがそれぞれ異なる．これより， $n$  が大きい程，オーバーシュートが小さく抑えられていることが分かる．

さらに，制御系の総合的な評価のため，4つのコントローラを用いて外乱応答を計測した．その結果を Fig.4 に示す．これは定常吸引力の約  $25[\%]$  に相当する  $0.7[\text{N}]$  相当の擬似力外乱を鉛直下向きに加えた結果である．4つのコントローラの外乱除去特性がほぼ同等であることが確認できる<sup>6</sup>．

制御実験により，重み行列  $N$  が制御系の過渡応答の評価指標として有用であることが実験的に確認できた．ただし，制御実験に対して以下の点に注意する必要がある．

(注意4)：  $\theta_1$  の値を ( $\theta_1 > 1.1$ )，もしくは ( $\theta_1 < 0.3$ ) とした場合にはこのような綺麗な目標値応答の変化特性は得られない．

(注意5)： 設計パラメータ  $\rho$  を変化させると制御入力  $u$  へのレギュレーションの効果が変化して目標値応答も変化し，応答を改善させることも可能である．ただし， $\rho$  の変化は一般化プラントの  $D_{12}$  行列に反映されるため，(5) 式のリカッチ解  $M$  のみに影響を及ぼす．つまり  $\rho$  を変化させても (7) 式の  $P$ ，(16) 式の  $Q$  は不変で，その結果  $N$  は変わらない．

(注意6)： Fig.3 では全体的にオーバーシュートが大きい．これは  $W_v(s)$ ， $W_w(s)$  の次数を上げることで改善可能と思われる．

<sup>6</sup>外乱を定常吸引力の  $50[\%]$  相当， $100[\%]$  相当の鉛直下向き擬似力外乱を加えても制御系は安定性を失うことなく，良好な特性を示した．そのとき外乱応答は Fig.4 の相似形となる．

## 7 おわりに

本論文では無限時間区間における外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御問題を直交条件を課さない場合について定式化し，その問題に対して解を与えている．またこの結果を用いて磁気浮上システムに対して制御系設計を行い，制御実験により，理論検証を行なった．具体的には，状態量のレギュレーションに関わるパラメータ ( $\theta_1$ ) と DIA 制御での重み  $N$  との関連について調べ，さらに重み  $N$  と過渡応答特性との関係を明らかにした．これにより，外乱と初期状態の不確かさの混合減衰  $H_\infty$  DIA 制御の有用性を確認した．

## 文献

- [1] K. Uchida and M. Fujita, "Controllers Attenuating Disturbance and Initial-Uncertainties for Time-Varying Systems," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 156, Springer-Verlag, pp. 187 - 196, 1991.
- [2] P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal and K. R. Poolla, " $H_\infty$  Control with Transient," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, pp. 1373 - 1393, 1991.
- [3] K. Uchida and A. Kojima and M. Fujita, " $H_\infty$  control attenuating initial-state uncertainties," *Int. J. of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 245 - 252, 1997.
- [4] A. Kojima, M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura, "Linear Quadratic Differential Games and  $H_\infty$  Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -," *Trans. SICE*, vol. 28, no. 5, pp. 570 - 577, 1992.
- [5] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [6] T. Namerikawa, M. Fujita and R. S. Smith, " $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties : Evaluation by a Magnetic Suspension System", *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 87-92, 2001.
- [7] T. Namerikawa, M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, "A Generalized  $H_\infty$  Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties," *Proc. of American Control Conf.*, pp. 2204-2209, 2002.