

初期状態の不確かさを考慮した H_∞ DIA 制御の磁気軸受への応用

H_∞ DIA Control Attenuating Initial state Uncertainties for the Magnetic Bearing

正 滑川 徹 (長岡技術科学大学)

篠塚 互 (長岡技術科学大学)

Toru NAMERIKAWA, Nagaoka University of Technology, 1603-1, Kamitomiokamachi, Nagaoka, Niigata
Wataru SHINOZUKA, Nagaoka University of Technology

This paper deals with an application of H_∞ DIA control attenuating initial-state uncertainties to the Magnetic Bearing. An H_∞ control problem, which treats a mixed Disturbance and an Initial-state uncertainty Attenuation(DIA) control for linear time-invariant systems in the infinite-horizon case, is examined. The mixed DIA problem supplies H_∞ controls with good transients and assures H_∞ controls of robustness against initial-state uncertainty. We derive a mathematical model of the magnetic bearing which has complicated rotor dynamics and nonlinear magnetic property. Then we apply this proposed H_∞ DIA control for the magnetic bearing, and evaluate its property with the H_∞ DIA control for MIMO systems via simulations.

Key Words: H_∞ DIA control, Initial-State Uncertainties, H_∞ Control, Robust Control, Magnetic Bearing, Mechatronics

1 はじめに

ロバストなコントローラ設計手法として一般的に知られる H_∞ 制御問題は制御対象の初期状態がゼロ以外の場合に過渡応答特性が劣化する可能性を有している。一方、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ 制御問題 (H_∞ DIA 制御問題) は従来の外乱減衰特性のみを考慮した H_∞ 制御に対して、初期状態が不確かであっても目標値追従において良好な過渡特性を得ることができるものと思われる。この制御問題は近年盛んに研究されている切替制御の実装法の一つとして有効であると考えられる。

外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ DIA 制御問題については、直交条件を含む制御対象に限定されていた⁽¹⁾⁽²⁾。実システムに本手法を応用するには、制御系設計の自由度がかなり制約を受け、実用上十分でない⁽³⁾。そこで文献⁽⁴⁾では従来の結果から直交条件を外して、外乱と初期状態の不確かさの混合減衰無限時間区間 H_∞ DIA 制御問題を定式化し、可解条件の必要十分条件を導出し、ある1つの具体的な制御方策を提示した。

本稿では磁気軸受に対して H_∞ DIA 制御を応用し、有効性の検証を行う。磁気軸受は非接触支持が可能なため摩擦や磨耗がない。そのため電力貯蔵用フライホイール、真空ポンプなどに応用されている⁽⁵⁾。しかし、支持力をフィードバック制御された電磁石吸引力のみに頼るため、不釣合いやジャイロ効果などロータダイナミクスを陽に考慮しなければならない。また電磁石吸引力の非線形性も考慮する必要がある。これらの問題に対し様々なロバスト制御系設計を行った例が報告されている⁽⁶⁾。

本研究の目的は H_∞ DIA 制御を磁気軸受に応用し、ロバスト性と過渡応答特性を考慮した磁気軸受制御系を構成することとする。まず、ロータダイナミクスや電磁石の非線形特性などを考慮した磁気軸受の数学モデルを作成し、次に文献⁽⁴⁾の結果を用いて、磁気軸受に対して制御系設計を行う。最後に従来法として PID 制御および状態フィードバック制御によるコントローラと、 H_∞ DIA 制御のコントローラの応答をシミュレーションにより比較することで、提案法の有効性検証を行う。

2 H_∞ DIA 制御

2.1 問題設定

時間区間 $[0, \infty)$ で定義される以下の線形時不変システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} u \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $x \in R^n$ は状態で $x_0 = x(0)$ は初期状態; $u \in R^r$ は制御入力; $y \in R^m$ は観測出力; $z \in R^q$ は被制御量; $w \in R^p$ は外乱であり、 $w(t)$ は区間 $[0, \infty)$ において 2 乗可積分な関数 ($w \in L^2[0, \infty)$) とする。またここでシステムは直交条件を有していないことを確認しておく。

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ は適当な次元を有する定数行列であり、以下の条件を満たすものとする。

- (A, B_1) : 可制御 (A, C_1) : 可観測
- (A, B_2) : 可制御 (A, C_2) : 可観測
- $D_{12}^T D_{12} \in R^{r \times r}$: 正則
- $D_{21} D_{21}^T \in R^{m \times m}$: 正則

システム (1) に対して、すべての許容制御則 $u(t)$ が以下の線形時不変システムで与えられ、(1) と (2) によって構成される閉ループ系が内部安定となるものとする。

$$\begin{aligned} u &= J\zeta + Ky \\ \dot{\zeta} &= G\zeta + Hy, & \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\zeta(t)$ はコントローラの状態であり、有限の次元を持つ。また J, K, G, H は適切な次元を持つ定数行列である。

与えられたシステムと上記の許容制御則のクラスに対して、以下の H_∞ DIA 制御問題を考える。

問題 1 H_∞ DIA 制御問題

$N > 0$ が与えられたときに、すべての $w \in L^2[0, \infty)$ とすべての

$x_0 \in R^n$ (ただし $(w, x_0) \neq 0$) に対して z が以下を満たすような外乱と初期状態の不確かさを混合減衰させる許容制御則を見つけよ.

$$\|z\|_2^2 < \|w\|_2^2 + x_0^T N^{-1} x_0 \quad (3)$$

上記の条件を満たす許容制御則を H_∞ DIA 制御 (または単に DIA 制御) (Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation (DIA) control) と呼ぶ.

初期状態 x_0 に対する重み行列 N は初期状態の不確かさの減衰の外乱減衰に対する相対的な重要性を表す. 行列不等式の意味でより大きな N を選ぶことは, 初期状態の不確かさをより減衰させる許容制御則を選ぶことを意味する.

2.2 H_∞ DIA コントローラ

DIA 制御は初期状態が既知である場合にはある H_∞ 制御になる. このことにより DIA 制御もそれに類似した制御則の構造を持つ. 問題を解くために以下の条件を考える.

(A1) 以下の Riccati 方程式が可解で, 解 $M > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} & M(A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1) \\ & + (A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T M \\ & - M(B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T - B_1 B_1^T) M \\ & + C_1^T C_1 - C_1^T D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで以下の行列は安定である.

$$\begin{aligned} & A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1 \\ & - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T M + B_1 B_1^T M \end{aligned} \quad (5)$$

(A2) 以下の Riccati 方程式が可解で, 解 $P > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2) P \\ & + P(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2)^T \\ & - P(C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 - C_1^T C_1) P \\ & + B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで以下の行列は安定である.

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & - P C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 + P C_1^T C_1 \end{aligned} \quad (7)$$

(A3) $\rho(PM) < 1$

ここで $\rho(X)$ は行列 X のスペクトル半径を表し, $\rho(X) = \max |\lambda_i(X)|$ である.

上記の仮定のもとで以下の結果が得られる.

定理 1⁽⁴⁾

システム (1) に対して, 仮定 (A1), (A2), (A3) が成り立つものとする. このとき H_∞ セントラルコントローラが以下で与えられ,

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T M + D_{12}^T C_1) (I - PM)^{-1} \zeta \\ \dot{\zeta} &= A \zeta + B_2 u + P C_1^T (C_1 \zeta + D_{12} u) \\ & \quad + (P C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (y - C_2 \zeta) \\ \zeta(0) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

この H_∞ セントラルコントローラ (8) が DIA 制御であるための必要十分条件は以下の条件 (A4) を満たすことである.

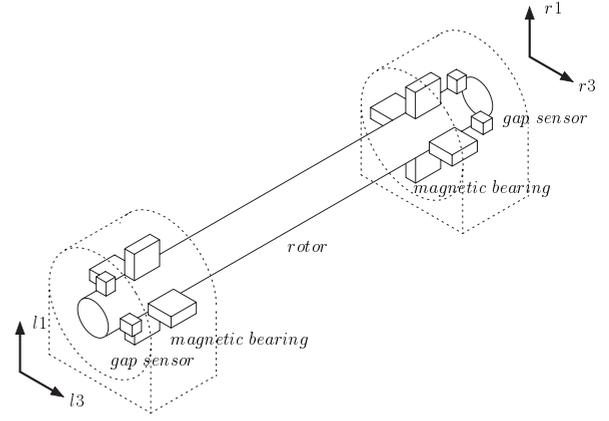


Fig. 1 Magnetic Bearing

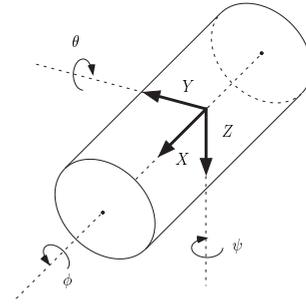


Fig. 2 Rotor

(A4) $Q + N^{-1} - P^{-1} > 0$,

ここで Q は以下の Riccati 方程式の最大解である.

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1}) \\ & + (A - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 \\ & + (B_1 B_1^T - B_1 D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21} B_1^T) P^{-1})^T Q \\ & - Q(B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L)^T \\ & \quad \times (B_1^T - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 P + D_{21} B_1^T) L) Q \\ & = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $L := (I - PM)^{-1}$.

3 システム構成と数学モデル

3.1 磁気軸受

磁気軸受は電磁力を用いて回転体を非接触で支持する装置である. 制御対象である磁気軸受には LaunchPoint 社の磁気軸受装置 MBC500 を用いている. 構成図を Fig. 1 に示す.

この磁気軸受は, ロータの両端に対して水平, 鉛直方向に挟み込むように電磁石が設置され, 同方向の電磁石は共通の入力を持つ. また, 両端の水平, 鉛直方向に対して1つずつのホール素子型ギャップセンサが設置されている. 本対象における制御目的は4対の電磁石の吸引力を制御することで, ロータを安定に非接触で浮上させることである. ロータは非磁性体であるが電磁石に面してロータ表面に鉄の帯が巻かれていて局所的に電磁石吸引力が働くため, スラスト方向に対する制御を行う必要はない.

次に制御対象の運動方程式を求める際に以下の仮定を置く.

- 回転子は剛体である.
- 回転子は回転子軸に対して回転対称である.
- 電磁石に発生する速度起電力は小さく, 無視できる.

- 8 個の電磁石はすべて特性が等しい.
- 電磁石の抵抗, インダクタンスは定数とする.

この仮定のもとで磁気軸受におけるロータ (Fig.2) の Y, Z 方向の運動方程式および Y, Z 軸に対する回転の運動方程式を以下に示す.

$$m\ddot{y}_s = -f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3} \quad (10)$$

$$m\ddot{z}_s = mg - f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1} \quad (11)$$

$$J_y\ddot{\theta} = -J_x p\dot{\psi} + lm(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \quad (12)$$

$$J_y\ddot{\psi} = -J_x p\dot{\theta} + lm(-f_{l3} - v_{ml3} + f_{r3} + v_{mr3}) \quad (13)$$

ここで, $y_s(t)$: Y 軸方向の変位, $z_s(t)$: Z 軸方向の変位, $\theta(t)$: Y 軸回りの回転角, $\psi(t)$: Z 軸回りの回転角, m : ロータの質量, g : 重力加速度, l_m : ロータ重心から電磁石までの距離, J_x : X 軸回りの慣性モーメント, J_y : Y, Z 軸回りの慣性モーメント, p : ロータの回転速度, f_j : 電磁石吸引力, v_{mj} : 外乱である. なお各パラメータに付いている添え字 j は左鉛直方向 $l1$, 右鉛直方向 $r1$, 左水平方向 $l3$, 右水平方向 $r3$ に属するパラメータの識別子とする. 磁気軸受における物理パラメータを Table 1 に示す.

Table 1 Parameter

Parameter	Symbol	Value
Mass of the Roter	m	0.2629[kg]
Length of the Roter	L_R	0.269[m]
Distance between Center and Electromagnet	l_m	0.1105[m]
Moment of Inertia about X	J_x	5.053×10^{-6} [kgm ²]
Moment of Inertia about Y	J_y	1.585×10^{-3} [kgm ²]
Steady Gap	G	0.4×10^{-3} [m]
Coefficients of $f_j(t)$	k	2.8×10^{-7}
steady Current(vertical)	I_{l1}, I_{r1}	0.1425[A]
steady Current(horizontal)	I_{l3}, I_{r3}	0[A]
Resistance	R	4[Ω]
Inductance	L	8.8×10^{-4} [H]
Steady Voltage(vertical)	E_{l1}, E_{r1}	0.57[V]
Steady Voltage(horizontal)	E_{l3}, E_{r3}	0[V]

運動方程式 (10), (11), (12), (13) の変数を定常ギャップからの微小変位 $g_j(t)$ を用いて以下に示す.

$$y_s = -(g_{l3} + g_{r3})/2 \quad (14)$$

$$z_s = -(g_{l1} + g_{r1})/2 \quad (15)$$

$$\theta = (g_{l1} - g_{r1})/2l_m \quad (16)$$

$$\psi = (-g_{l3} + g_{r3})/2l_m \quad (17)$$

これらの変換式を用いて運動方程式 (10), (11), (12), (13) をギャップを変数とする運動方程式 (18), (19), (20), (21) に書き換える.

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{l1} &= -\ddot{z} + l_m\ddot{\theta} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) - \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l3} + \dot{g}_{r3}) \\ &\quad + \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{r1} &= -\ddot{z} - l_m\ddot{\theta} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l1} - v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) + \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l3} + \dot{g}_{r3}) \end{aligned}$$

$$-\frac{l_m^2}{J_y}(f_{l1} + v_{ml1} - f_{r1} - v_{mr1}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{l3} &= -\ddot{y} + l_m\ddot{\psi} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) - \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l1} + \dot{g}_{r1}) \\ &\quad + \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l3} + v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{r3} &= -\ddot{y} - l_m\ddot{\psi} \\ &= -\frac{1}{m}(-f_{l3} - v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) + \frac{pJ_x}{2J_y}(-\dot{g}_{l1} + \dot{g}_{r1}) \\ &\quad - \frac{l_m^2}{J_y}(f_{l3} + v_{ml3} - f_{r3} - v_{mr3}) \end{aligned} \quad (21)$$

次に電磁石の電磁石吸引力方程式は以下の式となる.

$$f_j = k \frac{(i_j + 0.5)^2}{(g_j - 0.0004)^2} - k \frac{(i_j - 0.5)^2}{(g_j + 0.0004)^2} \quad (22)$$

非線形である電磁石吸引力方程式 (22) を定常動作点付近でテイラー展開し 1 次項までに近似すると以下の式が得られる.

$$f_j = k \frac{(I_j + 0.5)^2 - (I_j - 0.5)^2}{1.6 \times 10^{-7}} + K_{xj}g_j + K_{ij}i_j \quad (23)$$

$$K_{xj} = -2k \left(\frac{(I_j + 0.5)^2}{(-4 \times 10^{-4})^3} + \frac{(I_j - 0.5)^2}{(4 \times 10^{-4})^3} \right)$$

$$K_{ij} = 2k \left(\frac{(I_j + 0.5)}{(-4 \times 10^{-4})^2} - \frac{(I_j - 0.5)}{(4 \times 10^{-4})^2} \right)$$

また電気回路方程式を以下に示す.

$$L \frac{di_j(t)}{dt} + R(I + i_j(t)) = E_j + e_j(t) + v_{Lj}(t) \quad (24)$$

ここで, $i_j(t)$: 定常電流からの微小変化量, $e_j(t)$: 定常電圧からの微小変化量, v_{Lj} : ノイズである.

装置からの観測出力 $y_j(t)$ はギャップセンサによって得られるロータの位置情報 $g_j(t)$ とし, 以下の式が得られる. ここで $w_j(t)$ はセンサノイズやモデルの不確かさの影響を表す.

$$y_j(t) = g_j(t) + w_j \quad (25)$$

3.2 システムの状態方程式

式 (18) ~ (25) を鉛直, 水平方向に分けてまとめると磁気軸受の状態方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_v & pA_{vh} \\ -pA_{vh} & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_v & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v \\ v_h \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_v \\ y_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_v \\ w_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$x_v = [g_{l1} \ g_{r1} \ \dot{g}_{l1} \ \dot{g}_{r1} \ i_{l1} \ i_{r1}]^T$$

$$x_h = [g_{l3} \ g_{r3} \ \dot{g}_{l3} \ \dot{g}_{r3} \ i_{l3} \ i_{r3}]^T$$

$$u_v = [e_{l1} \ e_{r1}]^T, \quad u_h = [e_{l3} \ e_{r3}]^T$$

$$v_v = [v_{ml1} \ v_{mr1} \ v_{Ll1} \ v_{Lr1}]^T$$

$$v_h = [v_{ml3} \ v_{mr3} \ v_{Ll3} \ v_{Lr3}]^T$$

$$y_v = [y_{l1} \ y_{r1}]^T, \quad y_h = [y_{l3} \ y_{r3}]^T$$

$$w_v = [w_{l1} \ w_{r1}]^T, \quad w_h = [w_{l3} \ w_{r3}]^T$$

$$A_v := \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x1}A_1 & 0 & K_{i1}A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L)I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_h &:= \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ K_{x3}A_1 & 0 & K_{i3}A_1 \\ 0 & 0 & -(R/L)I_2 \end{bmatrix} \\
A_{vh} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_v = B_h &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1/L)I_2 \end{bmatrix} \\
C_v = C_h &:= [I_2 \quad 0 \quad 0] \\
D_v = D_h &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & (1/L)I_2 \end{bmatrix} \\
A_1 &:= \begin{bmatrix} 1/m + l_m^2/J_y & 1/m - l_m^2/J_y \\ 1/m - l_m^2/J_y & 1/m + l_m^2/J_y \end{bmatrix} \\
A_2 &:= \begin{bmatrix} J_x/2J_y & -J_x/2J_y \\ -J_x/2J_y & J_x/2J_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで I_2 は 2 次の単位行列とし, $K_{x1} = K_{x11} = K_{xr1}$, $K_{x3} = K_{x13} = K_{xr3}$, $K_{i1} = K_{i11} = K_{ir1}$, $K_{i3} = K_{i13} = K_{ir3}$ とおく. また本稿では回転速度 p をゼロとして扱う. 式 (26) をまとめると, 以下の状態方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u_g + D_g v_0 \\
y &= C_g x_g + w_0
\end{aligned} \quad (27)$$

ここで $x_g := [x_v^T \ x_h^T]^T$, $u_g := [u_v^T \ u_h^T]^T$, $v_0 := [v_v^T \ v_h^T]^T$, $w_0 = [w_v^T \ w_h^T]^T$ であり, A_g, B_g, C_g, D_g は適当なサイズの行列である.

4 制御系設計

4.1 一般化プラントの構成と問題設定

まず外乱 $v_0(t)$ と $w_0(t)$ に関して考察する. v_0 は入力外乱で, 低周波帯域で影響を及ぼす. また w_0 は出力外乱, およびモデルの不確かさを表す. そこで重み関数 W_v および W_w を導入し v_0, w_0 を以下のように表す.

$$v_0 = W_v(s)w_2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
W_v &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} C_w (sI_4 - A_w)^{-1} B_w, \\
w_0 &= W_w w_1
\end{aligned} \quad (29)$$

ここで I_4 は 4 次の単位行列である. 次に被制御変数について考察する. 制御の基本仕様が浮上体の非接触支持であるため, 被制御量として定常ギャップからの微小変位 $g_j(t)$ とその速度 $\dot{g}_j(t)$ を選ぶ. これらの状態変数に, レギュレーションのために行列 Θ で重み付けし, 被制御量 z_1 を以下のように定義する. 同様に制御入力のレギュレーションのために u_g に ρ で重み付けした被制御量 z_2 を定義する.

$$z_g = F_g x_g, \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
F_g &= \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix} \\
z_1 &= \Theta z_g, \quad \Theta = \text{diag} [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2] \\
z_2 &= \rho u_g
\end{aligned} \quad (31)$$

最終的には制御対象と重み行列をまとめ, 一般化プラントを (32) のように構成する. このブロック線図は Fig.3 で表される. なおこの一般化プラントには直交条件が課されていないことに注意されたい.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\
z &= C_1 x + D_{12} u \\
y &= C_2 x + D_{21} w
\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A_g & D_g C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_g D_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} \\
C_1 &= \begin{bmatrix} \Theta F_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \\
C_2 &= [C_g \quad 0], \quad D_{21} = [W_w \quad 0]
\end{aligned}$$

ここで $x := [x_g^T \ x_w^T]^T$, x_w は $W_w(s)$ の状態で, $x_w := [x_{w1} \ x_{w2} \ x_{w3} \ x_{w4}]^T$ とおく. また w, z を $w := [w_1^T \ w_2^T]^T$, $z := [z_1^T \ z_2^T]^T$ とおく.

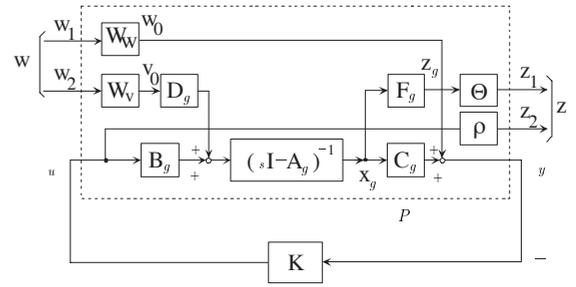


Fig. 3 Generalized Plant

本制御系設計での制御問題は以下で与えられる.

制御問題: 一般化プラント (32) に対して DIA 条件 (3) を達成する許容コントローラ $K(s)$ を見つけよ.

4.2 H_∞ DIA コントローラ

上記の制御問題に対する解を得るため, MATLAB 上で繰り返し計算を行なうことによって以下の設計パラメータを選定した.

$$\begin{aligned}
W_v(s) &= \frac{2.0 \times 10^3}{s + 0.100} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad W_w = 0.50 \\
\Theta &= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \\
\theta_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0005 \end{bmatrix} \\
\rho &= \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (33)$$

これによって, H_∞ DIA コントローラ $K_{DIA}(s)$ が直接的に得られる. ここでコントローラ $K_{DIA}(s)$ は 4 入力 4 出力で, 次数は 16 次である. $K(s)$ の周波数応答を Fig.4 に示す. このときの重み行列 N の最大値は $1.037282 \times 10^{-4} \times I$ である. ここで計算を簡単にするために N の自由度を

$$N = nI \quad (34)$$

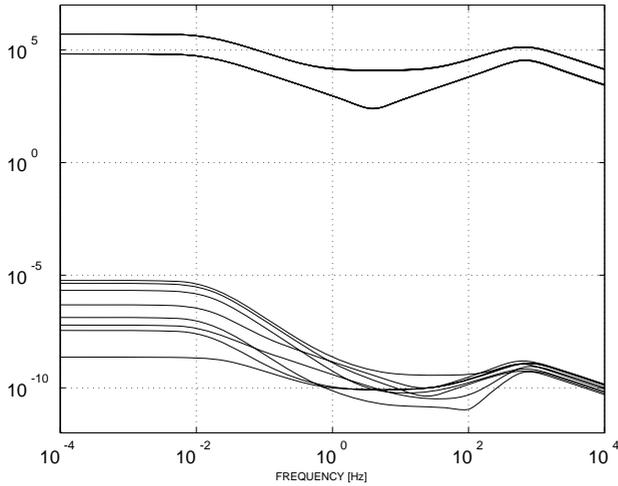


Fig. 4 Frequency Responses of H_∞ DIA Controllers

と限定した. n は正のスカラで I は一般化プラントと等しい次数を持つ単位行列である. 正定行列 N をこのように限定するのは, 解析後の評価を容易にするためである.

5 シミュレーションによる検証

5.1 従来法による制御系設計

前節で得られたコントローラ $K_{DIA}(s)$ を用いてシミュレーションによる検証を行った. まず比較対象となる従来法として PID 制御および積分型状態フィードバック制御について記す. PID コントローラの構造を Fig. 5 に, 積分型状態フィードバックコントローラの構造を Fig. 6 に示す.

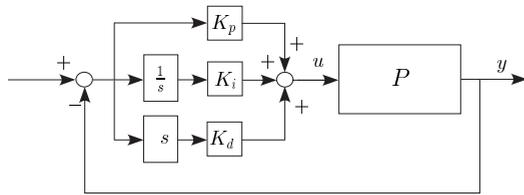


Fig. 5 PID Control

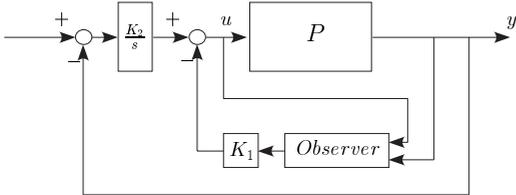


Fig. 6 State Feedback Control

次に各コントローラのゲインを以下に示す.

$$K_p = 1.1 \times 10^4 \times I_4, \quad K_i = 3.0 \times 10^4 \times I_4, \quad K_d = 20 \times I_4,$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_a & K_b & K_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_d & K_e & K_f \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 100000 \times I_4$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 11359 & -95.435 \\ -95.436 & 11359 \end{bmatrix}, \quad K_b = \begin{bmatrix} 50.904 & 8.4712 \\ 8.4712 & 50.904 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 0.4045 & -0.0706 \\ -0.0706 & 0.4045 \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} 10486 & -84.881 \\ -84.882 & 10486 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 48.867 & 8.1468 \\ 8.1468 & 48.867 \end{bmatrix}, \quad K_f = \begin{bmatrix} 0.3890 & -0.0679 \\ -0.0679 & 0.3890 \end{bmatrix}$$

また Fig.6 におけるオブザーバの構造を以下に示す.

$$\dot{\hat{x}}_g = (A_g - K_3 C_g) \hat{x}_g + K_3 y + B_g u \quad (35)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 470.71 & -78.353 & 0 & 0 \\ -78.353 & 470.71 & 0 & 0 \\ 108850 & -36882 & 0 & 0 \\ -36882 & 108850 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 453.54 & -75.211 \\ 0 & 0 & -75.211 & 453.54 \\ 0 & 0 & 100680 & -34111 \\ 0 & 0 & -34111 & 100680 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで \hat{x}_g : 状態量の推定値, K_3 : オブザーバゲインである. PID ゲインはシミュレーションによる試行錯誤により求めた. 状態フィードバックゲインは MATLAB の *lqr* コマンドにより適切な重み行列を指定することで求めた.

5.2 検証結果

まず入力 u_{11} に 0.1[mm] のステップ入力信号を加え, 応答波形を測定した. H_∞ DIA の結果を Fig.7, PID の結果を Fig.8, 状態フィードバックの結果を Fig.9 に示す. 次に, ステップ状外乱をシステムにそれぞれ加えたときの応答波形を測定した. ここでは 0.1[V] のステップ信号を外乱 v_{L11} に加えた場合を想定する. その結果を Fig.10, 11, 12 にそれぞれ示す. H_∞ DIA 制御と PID 制御を比較すると, H_∞ DIA 制御は定常状態への収束が早く $g_{r1}(t)$ に対する影響も小さくなっている. H_∞ DIA 制御と状態フィードバック制御を比較すると, H_∞ DIA 制御はステップ応答のオーバーシュートが大きい, 外乱応答においては影響を小さく抑えている.

次にコントローラのロバスト性を比較した. モデルパラメータの変動分として, 電磁石の抵抗値がノミナルモデルから 1.8 倍 (7.2Ω) に変動した場合を想定し, 各コントローラの外乱応答を比較した. モデル変動前後の H_∞ DIA 制御の外乱応答を Fig.10 に, PID 制御の外乱応答を Fig.11 に, 状態フィードバック制御の外乱応答を Fig.12 に示す. H_∞ DIA 制御を PID 制御や状態フィードバック制御と比較すると, H_∞ DIA 制御はモデル変動後も応答の劣化が抑えられている. H_∞ DIA コントローラがロバスト性においても優れていることが示された. 総合的に見て従来法に対して H_∞ DIA が優れていることが示された.

6 おわりに

本稿では外乱と初期状態の不確かさの混合減衰 H_∞ DIA 制御問題を磁気軸受に対して適用し, 多入出力系における有効性を検証した. 具体的には, 磁気軸受の数学モデルを作成し, 制御系設計を行った. そして, 従来の制御問題と H_∞ DIA 制御問題の応答を比較し, 応答性能, ロバスト性の面で磁気軸受における有効性が確認された. 今後は実機にて H_∞ DIA 制御を実装し, 切替制御の実現を目指す.

参考文献

- (1) A. Kojima, M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura, "Linear Quadratic Differential Games and H_∞ Control - A Direct Approach Based on Completing the Square -," *Trans. SICE*, vol. 28, no. 5, pp. 570 - 577, 1992.
- (2) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- (3) T. Namerikawa, M. Fujita and R. S. Smith, " H_∞ Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties : Evaluation by a

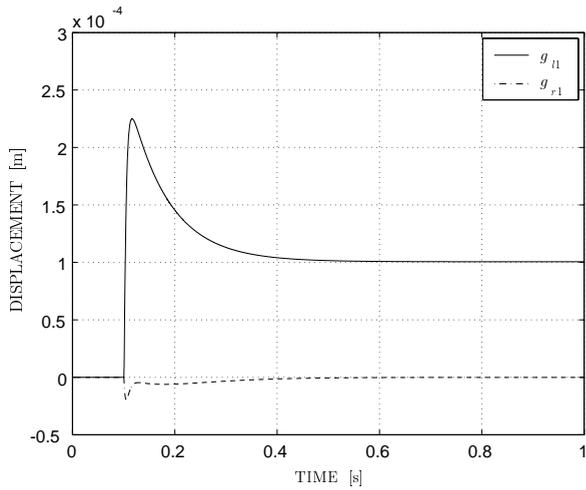


Fig. 7 Step Response of H_∞ DIA Controller

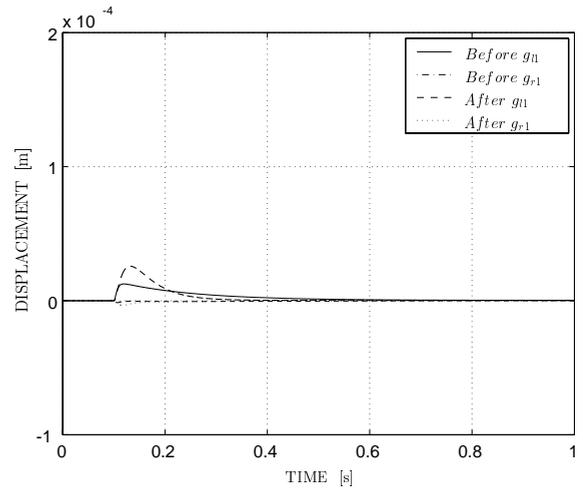


Fig. 10 Disturbance Response of H_∞ DIA Controller with/without perturbation

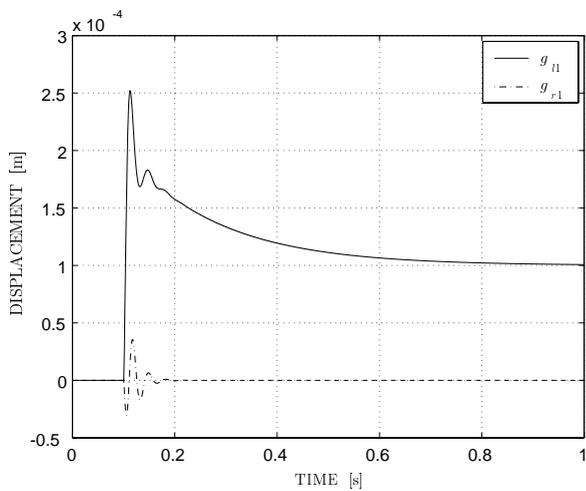


Fig. 8 Step Response of PID Controller

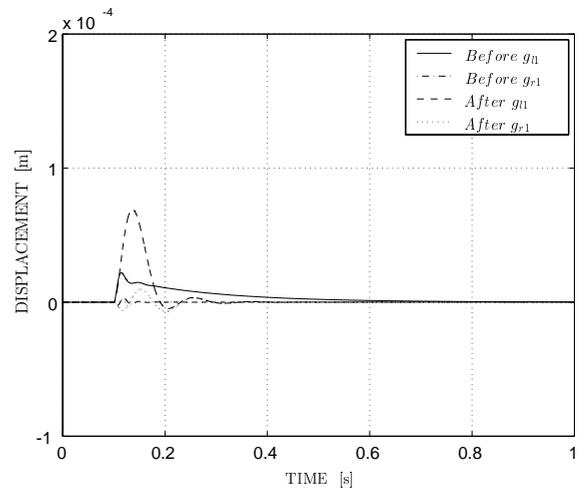


Fig. 11 Disturbance Response of PID Controller with/without perturbation

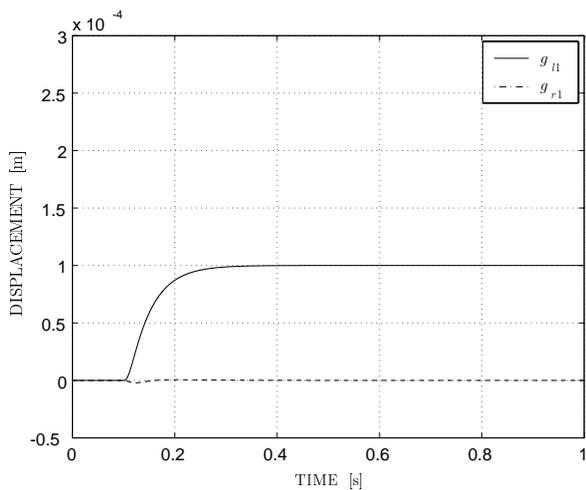


Fig. 9 Step Response of State Feedback Controller

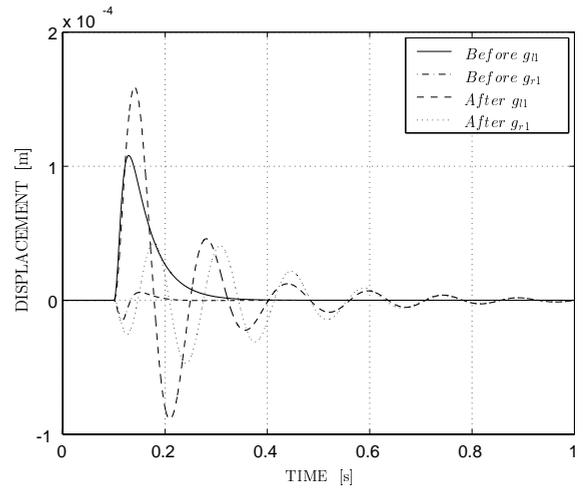


Fig. 12 Disturbance Response of State Feedback Controller with/without perturbation

Magnetic Suspension System”, *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 87-92, 2001.

- (4) T. Namerikawa, M. Fujita, R.S. Smith and K. Uchida, “A Generalized H_∞ Control System Design Attenuating Initial State Uncertainties,” *Proc. of American Control Conf.*, pp. 2204-2209, 2002.
- (5) 電気学会編, “磁気浮上と磁気軸受,” コロナ社, 1993
- (6) 有我祐一, 野波健蔵, 酒井克章, “ゼロパワー磁気軸受系の非線形制御”, 日

本機械学会論文集 (C 編), 67 巻-654 号, pp.102-116, 2001

- (7) T. Namerikawa and M. Fujita, “ H_∞ Control System Design of the Magnetic Suspension System Considering Initial State Uncertainties,” *IEEJ Trans. EIS*, Vol.123, No.6, pp.1094-1100, 2003